習題 1.1

1-4 題　工程數學微積分

試以積分方式或已知之微分公式求解下列常微分方程式。

1. $y' + 2\sin 2\pi x = 0$
2. $y' = y$
3. $y' = 4e^{-x}\cos x$
4. $y' = \cosh 5.13x$

5-8 題　初始值問題的驗證

(a) 在下列問題中，試證明y 是常微分方程式的解。(b) 由初始值問題決定y 為特解。(c)繪出下列初始值問題之解曲線。

5. $y' + 4y = 1.4,\quad y = ce^{-4x} + 0.35,\quad y(0) = 2$
6. $y' = y + e^{x},\quad y = (x + c)e^{x},\quad y(0) = \frac{1}{2}$
7. $y' = y - y^2,\quad y = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}},\quad y(0) = 0.25$

8. 觀察習題7，並求出微分方程式之兩個常數解。

9-10 題　模型化與應用

習題9-10 將提供模型化之第一印象，而在本章後續之章節，並將介紹更多之題目。

9. 半衰期。半衰期可用於評估量測指數衰減之情形，此係用於計算放射性物質衰減為原來一半數量所需之時間。試計算範例5 中鐳$^{226}_{88}$Ra的半衰期時間，並以年為單位表示。

10. 自由落體。一般觀察石頭落下或鐵球落下時，對於空氣阻力之影響可忽略不計。實驗顯示此物體落下之加速度為常數，其值等於9.8，亦即$g = 9.8$ m / sec^2= 32 ft / sec^2，該值又稱為重力加速度（acceleration of gravity）。試將此自由落體予以模型化為常微分方程式$y(t)$，以表示時間為函數之落下距離；再將該微分方程以t

$= 0$ 且初始速度$v = y' = 0$ 時之狀態，進而說明計算自由落體之定律，即如下式所示：

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

習題1.2

1-4 題　方向場和解曲線

試以電腦代數系統軟體或手算方式繪出習題1-4 之方向場，且在此方向場中，試繪出通過(x, y) 點之解曲線。

1. $y' = 1 + y^2$,　$(\frac{1}{4}\pi, 1)$
2. $y' = 1 - y^2$,　$(0, 0), (2, \frac{1}{2})$
3. $y' = x - 1/y$,　$(1, \frac{1}{2})$
4. $y' = e^{y/x}$,　$(2, 2), (3, 3)$

5-6 題　方向場的準確度

方向場在求解常微分方程式時非常有用，因為它可提供所有解之印象與概念，且不必準確求解，此法在某些困難或無法求出常微分方程式時，特別適用。試由習題5 至習題6繪出方向場及描繪解曲線，並與正確解互相比較，以對於方向場方法具有更佳體認。

5. $y' = \cos \pi x$
6. $y' = -5y^{1/2}$（正確解 $\sqrt{y} + \frac{5}{2}x = c$）

7-8 題　運動

某物體B 沿著直線等速移動，$y(t)$ 為此物體由$t = 0$ 至時間$t = 10$ 之移動距離。試根據此移動模型，繪出下列常微分方程式之方向場，並在方向場符合下列初始情形下，分別描繪解曲線。

7. 距離等於速度乘以時間，$y(1) = 1$。

8. 跳傘人員。對於跳傘人員而言，有兩個力量會外加在跳傘過程中，其中包含地球重力加速度之力量及空氣阻力。試首先應用牛頓第二運動定律（Newton's second law） 予以建模， 亦即寫出$v(t)$之常微分方程式；接著繪出方向場（選擇m 並使比例常數為1）， 並假設當

$v = 10$ m/sec 時，降落傘會打開。試畫出方向場上之對應解，同時說明時速限制及在空氣阻力正比於$v(t)$ 之情況下，該降落傘是否足以安全打開？

9-10 題　尤拉方法

尤拉方法係利用數值方式解釋常微分方程式之最簡單方式。試使用此種方法或輔以電腦或掌上型計算機，以10 個步距求解下列習題，並繪出計算值及解曲線。

9. $y' = y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$

10. $y' = (y - x)^2, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$
正確解 $y = x - \tanh x$

習題1.3

. 留意！積分常數。為何在積分計算時，立即加入積分常數是很重要的步驟？

2-5 題　通解

試計算下列習題之通解，並說明推導步驟，同時以代入法檢查計算結果。

2. $y' = \sec^2 y$
3. $yy' + 36x = 0$
4. $xy' = y + 2x^3 \sin^2 \dfrac{y}{x}$　(令 $y/x = u$)
5. $xy' = y^2 + y$　(令 $y/x = u$)

6-9 題　初始值問題

求解下列習題之初始值問題，並由通解進而說明推導步驟。

6. $xy' + y = 0, \quad y(4) = 6$
7. $y' \cosh^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{1}{2}\pi$
8. $y' = -4x/y, \quad y(2) = 3$
9. $xy' = y + 3x^4 \cos^2 (y/x), \quad y(1) = 0$
   (令 $y/x = u$)

10-16 題　模型化及應用

10. 指數成長。假若於任何時間中，細菌數目之成長速率正比於t 時間的細菌數量，並於一個禮拜後加倍成長。則於兩個禮拜後，試計算細菌之總數量；又於四個禮拜後，細菌之總數量為何？

11. 放射性碳元素之年代鑑別。當某化石樹宣稱已有3,000 年，試參考範例4，計算其含有$^{14}_{6}C$成分之百分比。

12. 波以爾– 馬里歐德（Boyle-Mariotte）之理想氣體定律。實驗顯示一個低壓p時之氣體，其體積$V(p)$ 之變化率將等於$-V/p$，試將此情形予以模型化。

13. 牛頓冷卻定律。某溫度計之讀值為攝氏5 度，如將此溫度計置入攝氏22 度之房間，於1 分鐘後此溫度計之讀值升高為攝氏12 度。試問此溫度計之讀值達

到攝氏21.9 度或22 度時，需經過多少時間？

14. 乾衣機。假設某乾衣機之脫水能力正比於待脫水衣服之溼度，今若已知該乾衣機於前10 分鐘時，可使溼衣物減少一半之水分，則試計算此衣物至何時，水分可減少99% ？建議讀者可先猜測，再加以計算比較。

15. 不在場證明？傑克於離開酒吧時被逮捕，但他聲稱在酒吧內至少已待半個小時，並提供此理由作為其不在場證明；但警察檢查停放於酒吧入口之車子，卻發現逮捕傑克當時的水溫為華氏190度，並於30 分鐘之後水溫降為華氏110度。試問這些結果足以提供傑克作為不在場證明嗎？請以檢視方式求解。

16. $y' = g(y/x)$ 之解曲線。試說明任一非垂直之直線與常微分方程式$y' = g(y/x)$ 在xy平面上之相交角度均相同。

習題 1.4

1-8 題　正合常微分方程式，積分因子

檢查下列習題常微分方程式之正合性。倘若為正合常微分方程式，則求解該方程式；反之，若非正合性方程式，則以檢視方式或參閱本節介紹之定理尋找積分因子。至若求解問題已有初始條件，則試求解問題之特解。

1. $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$
2. $\sin x \cos y\,dx + \cos x \sin y\,dy = 0$
3. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
4. $2x \tan y\,dx + \sec^2 y\,dy = 0$
5. $e^{2x}(2\cos y\,dx - \sin y\,dy) = 0, \quad y(0) = 0$
6. $2\cosh x \cos y\,dx = \sinh x \sin y\,dy$
7. $e^{-y}\,dx + e^{-x}(-e^{-y} + 1)\,dy = 0, \quad F = e^{x+y}$

8. 正合性。當常數 a, b, k 及 l 之值處於何種條件下，方可使常微分方程式 $(ax + by)\,dx + (kx + ly)\,dy = 0$ 具有正合性？試求得該正合常微分方程式之解。

習題1.5

1. 留意！試證明$e^{-\ln x} = 1/x$（不是$-x$）且$e^{-\ln (\sec x)} = \cos x$。

2-7 題　通解，初始值問題

試求解下列習題之通解。若該題提供初始條件，則請試著找出特解及繪出其圖形，並加以詳述。

2. $y' - y = 5.2$
3. $y' + ky = e^{-kx}$
4. $xy' = 2y + x^3 e^x$
5. $y' + y \sin x = e^{\cos x}, \quad y(0) = -2.5$
6. $y' = (y - 2) \cot x$
7. $y' = 6(y - 2.5) \tanh 1.5x$

8-10 題　線性常微分方程式之一般特性

將實際問題建立成線性常微分方程式之形式，頗有助於獲得該問題之解。因此可知線性常微分方程式確已兼具實務與理論之重要性，故於建模時，建議儘量採用線性常微分方程式。

試說明非齊次線性常微分方程式(1) 式與齊次線性常微分方程式(2) 式具有下列習題8 至習題10 之特性，並請自行選擇2 或3個方程式計算，同時輔以圖解說明每個方程式的特性。

8. 齊次線性常微分方程式(2) 式有兩個解$y1$與$y2$，此兩解之總和$y1 + y2$ 亦為常微分方程式(2) 式的一個解，該解經由任意常數a 之乘積後之$ay1$ 亦為原方程式的解，但此特性並不適用於(1) 式。

9. (1) 式的一個解與(2) 式的一個解之總和，亦可成為(1) 式的解。

10. 若(1) 式之解為$y1$， 則對於$cy1$ 有何說明？

11. 參數的變化。由另一個方法同樣可獲得(4) 式之結果，該方法可由下列觀念推導。將(3) 式寫成cy^*，其即為齊次線性常微分方程式$y^{*\prime} + py^* = 0$ 之解，其中

y^* 為指數函數；再嘗試利用函數u 取代(3) 式中之任意常數c，因此使得形成之函數$y = uy^*$ 為非齊次線性常微分方程式$y' + py = r$ 之解。

12-14 題　非線性常微分方程式

利用本節介紹之方法或分離變數法，求解習題12 至習題14 之通解。若該題提供初始條件，則試著找出特解，並繪製它的解曲線圖形。

12. $y' + xy = xy^{-1}, \quad y(0) = 3$
13. $y' = 3.2y - 10y^2$
14. $y' = 1/(6e^y - 2x)$

15-20 題　模型化，進一步應用

15. **牛頓冷卻定律（Newton's law of cooling）。**若蛋糕由烤箱取出時之溫度為華氏300 °F，而經過10 分鐘後，溫度降為華氏200 °F。試評估此蛋糕溫度於何時等同於實際室內溫度60 °F；譬如，蛋糕溫度於何時可降為華氏61 °F？

16. **藥品注射。**假若於$t = 0$ 起始，將某藥品以定量A g/min 方式注入血管，同時於時間t 時，將血管存在之藥品劑量正比例移除，試建立此藥品注射至血管之模型。

17. **伊利湖（Lake Erie）。**伊利湖之水容量約為450 km^3，每年之流動率（流入與流出）約175 km^3。今若已知在某時間，該湖水之污染濃度為$p = 0.04\%$，且假設流入湖內之水較為乾淨，僅約含有$p/4$之污染濃度，同時可與原湖水均勻混合（此假設僅具些微真實度）。試問約需多久時間，該湖水之污染濃度可降低至約為$p/2$ ？讀者可先猜測。

18. **可再生資源之收穫，釣魚。**假設某魚類族群之數量$y(t)$ 可以運籌規劃方程式(11) 式表示，此魚類遭捕獲之速率Hy 正比於y，試求解這個薛佛（Schaefer）模型，並在$H < A$ 時，求得平衡解$y1$ 與$y2$（> 0）。其中表示式$Y = Hy2$ 稱為平衡收穫（equilibrium harvest）或可持續生產量（sustainable yield），並請加以說明。

19. **收穫。**於習題18 中， 當$A = B = 1$ 及$H = 0.2$ 時（為求簡化起見），試找出滿足$y(0) = 2$ 之解，並繪製圖形及找出其限制值，同時說明其代表意義？又在本

題中若無任何釣魚捕獲，則將會變成何種情形？

20. 滅亡與無限成長。假設某族群$y(t)$ 之人口死亡率與其族群人口數量成正比，而其人口出生率則與配偶相遇繁衍之機會成正比。試列出該模型在不用求解情況下，找出初始少量人口之最終變化情形，同時描述初始大量人口之最終變化情形，再加以求解該模型。

習題1.6

1. 線性常微分方程式。若於$y' + p(x)y = r(x)$內之p 與r 均為連續，試對區間$|x - x0| \le a$ 內之所有x，證明$f(x, y)$ 於此常微分方程式中滿足本節介紹定理之條件，因此其所對應之初始值問題具有唯一解。另試問於求解常微分方程式時，確實必須應用這些定理嗎？

2. 垂直線段。若定理1 與定理2 之假設不僅適用於矩形，且亦滿足垂直無限長之線段$|x - x0| < a$，則(1) 式之解將存在於哪個區間內？

3. x 區間之長度。在大部分之情形，初始值問題(1) 式解之存在區間均大於目前定理保證之區間。試找出滿足$y' = 2y^2$、$y(1) = 1$ 最可能之a 值（選擇最佳之b 值），並與實際解相較。

4. 最大α 值。試問於本節範例1 中，最大之α 值為何？

5. 共通點（**common point**）。試問相同常微分方程式之兩條位於矩形內的解曲線，在滿足本節定理之假設下，是否具有共通點？

CH1　複習題

1. 試解釋常微分方程式、偏微分方程式、階、通解、特解及初始值問題等名詞之基本觀念，並列舉範例說明。

2. 為何每個一階常微分方程式均有一組解？如何表示求解公式？試舉例說明。

3. 何謂正合常微分方程式？方程式 $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ 是否一定具有正合性？

4. 請問本章尚列舉哪些其他求解方法，試說明之。

5. 試說明建模之意涵為何？是否可利用電腦代數系統軟體求解一階常微分方程式？可否利用電腦代數系統軟體建模？

6-8 題　方向場：數值解

試繪製下列問題之方向場(利用電腦代數系統軟體繪製或手繪)，並畫出解曲線，同時求解下列常微分方程式之精確解及比較。

6. $y' + 2y = 0$
7. $y' = y - 4y^2$
8. $y' + y = 1.01 \cos 10x$

9-11 題　通解

試找出下列問題之通解，並分別標示使用方法及詳述求解過程。

9. $y' + 2.5y = 1.6x$
10. $25yy' - 4x = 0$
11. $(3xe^y + 2y)\,dx + (x^2e^y + x)\,dy = 0$

12-13 題　初始值問題（IVP）

試求解下列初始值問題，並標示所使用之方法及詳述求解過程。

12. $y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1/\sqrt{2}$
13. $3 \sec y\,dx + \frac{1}{3} \sec x\,dy = 0, \quad y(0) = 0$

14-15 題　模型化及應用

14. 指數成長。倘若培養之細菌成長率正比於當時細菌的數目，且經過1 天後，

細菌數目變為原先之1.25 倍，試問在什麼時間區間內，細菌數將分別增為原來之(a) 兩倍與(b) 三倍？

15. 半衰期。於核子反應爐中，若在一天中錏$^{237}_{98}$損失10% 之重量，試問此錏之半衰期為何？又需花費多久時間，該錏將減少99% 之重量？