《工 程 數 學 第十版》

Erwin Kreyszig

Advanced Engineering Mathematics, 10E

CHAPTER *2* 二階線性常微分方程式

2.1 二階齊次線性常微分方程式

2.2 具有常數係數之齊次線性常微分方程式

2.3 質量－彈簧系統自由振盪之模型化

2.4 尤拉－柯西方程式

2.5 解之存在性與唯一性，朗斯基恩形式

2.6 非齊次常微分方程式

2.7 模型化：受外力之振盪及共振

2.8 電路之模型化

2.9 利用參數變異法求解

二階常微分方程式

二階常微分方程式若可表示為下式，則此方程式為**線性**（linear）：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

但若無法寫成上述形式，則表示該方程式為**非線性**（nonlinear）。

此方程式之獨特處在於它的變數 y 及導數均為線性，至於函數 p、q 及等號右側之 r，則可為任何一個 x 的函數。當方程式之首項是 $f(x)y''$，則可在除以 $f(x)$ 後，使方程式符合 y'' 為首項之**標準形式**（standard form）(1) 式。

範例1　齊次線性常微分方程式：重疊原理

函數 $y = \cos x$ 及 $y = \sin x$ 均為下列齊次線性常微分方程式之解：

$$y'' + y = 0$$

我們在此經由微分及代入法，予以驗證該解為本範例之解。而由於 $(\cos x)'' = -\cos x$，因此驗證如下：

$$y'' + y = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$$

$y = \sin x$ 之驗證，亦可以上述方法進行。將 $\cos x$ 乘上任意常數，如 4.7，並將 $\sin x$ 乘上任意常數，如 –2，再將兩函數相乘後之結果相加，同時將相加後之結果予以微分及代入原式，則可驗證本題如下：

$$(4.7 \cos x - 2 \sin x)'' + (4.7 \cos x - 2 \sin x)$$
$$= -4.7 \cos x + 2 \sin x + 4.7 \cos x - 2 \sin x = 0$$

定理1　齊次線性常微分方程式(2)式之基礎定理

對於一個齊次線性常微分方程式 (2) 式，在開放區間 I 中之兩個解的任意線性組合，將仍為 (2) 式在該區間中之一組解。尤其是在此類方程式中，兩個解的和及常數乘積後之結果，均仍為該式之解。

重疊原理

證明

令 y_1 及 y_2 為 (2) 式於區間 I 之解，接著將 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 及其導數代入(2) 式，並利用熟知規則 $(c_1y_1 + c2y2)' = c_1y_1' + c_2y_2'$，於是整理如下：

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

由於本式假設 y_1 及 y_2 為原方程式之解，故可知道上式最後一行之（…）= 0，此亦同時證明 y 確為 (2) 式在區間 I 中之解。

留意！ 請勿忘記此重要定理**僅適用於齊次線性常微分方程式**，但並不適用於非齊次線性或非線性常微分方程式。茲列舉兩個範例說明如下。範例2

範例2　非齊次線性常微分方程式

應用代入法可證明函數 $y = 1 + \cos x$ 及 $y = 1 + \sin x$，為下列非齊次線性常微分方程式之解：

$$y'' + y = 1$$

但此方程式的解之和，並非一個解，例如 $2(1 + \cos x)$ 或 $5(1 + \sin x)$，均不是上述微分方程式之解。

範例3　非線性常微分方程式

應用代入法可知，函數 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 均為下列非線性常微分方程式之解：

$$y''y - xy' = 0$$

但其解的和並非方程式之解，而且即使將其中一解乘上 -1，所得之 $-x^2$ 亦非方程式之解。

初始值問題，基底，通解

對於一個二階齊次線性常微分方程式之 (2) 式，其**初始值問題**（initial value problem）含括 (2) 式及兩個**初始條件**（initial conditions），如下：

$$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1 \tag{4}$$

此兩個初始條件係在所考慮之開區間內，以已知點 $x = x_0$ 得到 K_0 與 K_1（曲線斜率）。

接著，此初始條件式 (4) 式即可被用於決定下列常微分方程式**通解**（general solution）之兩個任意常數 c_1 及 c_2：

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{5}$$

其中 y_1 與 y_2 分別為常微分方程式之適當解（suitable solution），此所謂「適當」，將於下一範例說明。上述 (5) 式之結果為唯一解，該解在通過 (x_0, K_0) 點時，具有 K_1 之切線方向（斜率），此解亦稱為常微分方程式 (2) 式之**特解**（particular solution）。

範例4　初始值問題

試求解下列初始值問題：

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3.0, \qquad y'(0) = -0.5$$

解

步驟1：求得通解。由範例 1 可知，本範例之常微分方程式的解為 cos x 及 sin x，且可將解表示如下：

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

此即符合本節定義之通解。

步驟2：求取特解。將步驟 1 所得之通解取導數，即 $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$，並將題目所給之初始條件分別代入通解及 y'，由於 $\cos 0 = 1$ 與 $\sin 0 = 0$，

範例4 (續)

於是可求得常數值 c_1 與 c_2 如下：

$$y(0) = c_1 = 3.0 \qquad y'(0) = c_2 = -0.5$$

進而可求得此初始值問題之特解：

$$y = 3.0 \cos x - 0.5 \sin x$$

由圖 2.1 可知，在 $x = 0$ 處可獲得 y 之值為 3.0，且於該點之斜率為 –0.5，因此切線與 x 軸交會於 $x = 3.0/0.5 = 6.0$ 處（請留意，此圖之 x 軸與 y 軸之尺度間距不同！）

範例4 (續)

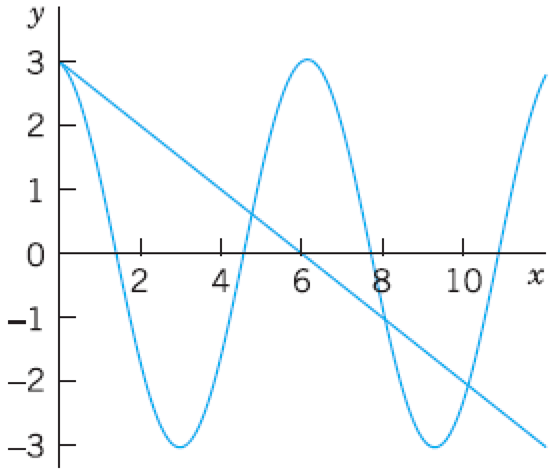

圖 2.1 範例 4 之特解及初始切線

定義　通解，基底，特解

常微分方程式(2) 式於某開放區間 I 之**通解**（general solution）為 (5) 式，且在此開放區間內，所求得的 y_1 與 y_2 必須不具有比例關係，c_1 與 c_2 為任意常數，則這些 y_1 與 y_2 稱為常微分方程式於開放區間內的解之**基底**（basis）或**基本系統**（fundamental system）。

若於 (5) 式指定特定值 c_1 與 c_2，則可獲得常微分方程式 (2) 式於區間 I 之**特解**（particular solution）。

對於區間之定義，請參閱 1.1 節。另對區間 I 之所有 x 而言，若於區間 I 內：

$$(6) \quad (a) \quad y_1 = ky_2 \qquad 或 \qquad (b) \quad y_2 = ly_1$$

則 y_1 與 y_2 於區間 I，將具有**比例關係**，其中 k 與 l 為數字，零或非零（請留意，若且唯若 $k \neq 0$，則 (a) 式之成立即同時含括 (b) 式）。

我們的確可利用一般概念，重新定義基底公式。換言之，若可在區間 I 內找到兩個函數 y_1 與 y_2 符合下式定義，則稱這兩個函數為**線性獨立**（linearly independent）：

$$(7) \qquad k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0$$

在區間 I 之每一處均符合，其即代表 $k_1 = 0$ 及 $k_2 = 0$

此外，對於某些不全為零之常數 k_1 與 k_2，若仍符合 (7) 式，則稱此時區間 I 內之兩個函數 y_1 與 y_2 為**線性相依**（linearly dependent），於是在 $k_1 \neq 0$ 或 $k_2 \neq 0$ 時，我們可觀察 y_1 與 y_2 間之比例關係如下：

$$y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2 \quad \text{或} \quad y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$$

反之，於線性獨立情況中，因 (7) 式無法相除，函數無法呈現比例關係，故可歸納出下列結論。

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \quad (2)$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (5)$$

定義　基底（重新列式）

於開放區間 I 內之 (2) 式的解之基底，即為 (2) 式於區間 I 內之一對線性獨立解。

若 (2) 式之係數 p 與 q 於某開區間 I 內為連續，則 (2) 式具有一組通解，同時此通解將可產生符合初始值問題 (2) 式與 (4) 式之唯一解。此唯一解包含 (2) 式在區間 I 內之所有解，故 (2) 式將沒有奇異解（singular solutions），亦即沒有一組解是無法由通解所獲得，此結果將於本書之 2.5 節中再作說明。

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3.0, \qquad y'(0) = -0.5 \qquad \text{範例 4}$$

範例5　基底，通解，特解

由於範例 4 之 $\cos x$ 與 $\sin x$ 之商為 $\cot x$（或 $\tan x$），其並非常數，故 $\cos x$ 與 $\sin x$ 可作為常微分方程式 $y'' + y = 0$ 的解之基底。因此，$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 為 $y'' + y = 0$ 之通解，而 $y = 3.0 \cos x - 0.5 \sin x$ 則為一組初始值問題的特解。

範例6　基底，通解，特解

試以代入法證實 $y_1 = e^x$ 與 $y_2 = e^{-x}$ 為常微分方程式 $y'' - y = 0$ 之解，接著求解下列初始值問題：

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -2$$

解

由於 $(e^x)'' - e^x = 0$ 及 $(e^{-x})'' - e^{-x} = 0$，因此可證明 e^x 與 e^{-x} 為常微分方程式之解，而且因為 $e^x/e^{-x} = e^{2x}$ 並非常數，故 e^x 與 e^{-x} 並不成比例，因此 e^x 與 e^{-x} 可作為一組基底。我們接著寫出其所對應之通解及導數，並將初始條件代入，$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$,

$$y(0) = c_1 + c_2 = 6, \; y'(0) = c_1 - c_2 = -2$$

於是求得常數值 $c_1 = 2$ 及 $c_2 = 4$，進而可寫出本題特解為 $y = 2e^x + 4e^{-x}$，且此特解滿足本範例之兩個初始條件。

已知一解時之尋找基底，降階

經由方程式之檢視或其他方法，常可求得一解；接著可將原式降為一階常微分方程式，以獲得第二個線性獨立解。此種方法即稱為**降階**（reduction of order）。本節首先列舉一個範例說明此方法之運算流程，接著加以廣泛說明。

範例7　已知一解時之降階，基底

試找出下列常微分方程式之解的基底：

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$$

解

首先檢視方程式得知 $y_1 = x$ 為一解，此乃因 $y_1' = 1$ 且 $y_1'' = 0$，所以代入原式時，第一項為零，而第二項與第三項互相抵消。接著將已知解加以微分：

$$y = uy_1 = ux, \qquad y' = u'x + u, \qquad y'' = u''x + 2u'$$

再將上式代入常微分方程式，可得：

$$(x^2 - x)(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

範例7　(續)

其中 ux 與 $-xu$ 互相對消後，形成下列常微分方程式；此時我們將該式同除以 x 及整理簡化，則為：

$$(x^2 - x)(u''x + 2u') - x^2u' = 0, \qquad (x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

此時若以 $v = u'$ 代入，即為 $(x^2 - x)v' + (x - 2)v = 0$，再經變數分離與積分運算，可得：

$$\frac{dv}{v} = -\frac{x-2}{x^2 - x}dx = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right)dx$$

$$\ln|v| = \ln|x - 1| - 2\ln|x| = \ln\frac{|x-1|}{x^2}$$

範例7 (續)

而因本題主要在於求得特解，所以上式不需積分常數，下一個積分亦同。於是將上式取指數並再次積分，可得：

$$v=\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2},\qquad u=\int v\,dx=\ln|x|+\frac{1}{x}$$

所以 $y_2=ux=x\ln|x|+1$

因為 $y_1=x$ 與 $y_2=x\ln|x|+1$ 互為線性獨立（它們的商並非常數），所以對於所有 x 而言，此即為本題之解的基底。