



《工程數學 第十版》

*Erwin Kreyszig*

*Advanced Engineering Mathematics, 10E*

# CHAPTER 1 一階常微分方程式

1.1 基礎概念與問題建模

1.2  $y' = f(x, y)$  的幾何意義、方向場、尤拉方法

1.3 可分離之常微分方程式與模型化

1.4 正合常微分方程式與積分因子

**1.5 線性常微分方程式、白努利方程式、人口動力學**

1.6 初始值問題解的存在性與唯一性



# 線性常微分方程式

一階常微分方程式若經由代數方式可改寫成：

$$(1) \quad y' + p(x)y = r(x)$$

上式一階常微分方程式為**線性**（linear）方程式；反之，若無法將一階常微分方程式表示成（1）式之形式，則稱其為**非線性**（nonlinear）方程式。

由（1）式常微分方程式之定義可知，當未知函數  $y$  及其導數  $y' = dy/dx$  均為線性，而  $p$  與  $r$  則可為任何變數  $x$  之函數時，此式即被視為線性常微分方程式。

又若在方程式之第一項為  $f(x)y'$ ，則建議可將方程式除以  $f(x)$ ，以得到如（1）式之**標準形式**（standard form），此時  $y'$  為首項，更具實際應用價值。

# 齊次線性常微分方程式 (HOMOGENEOUS LINEAR ODE)

若欲求解位於區間  $a < x < b$  內之 (1) 式，此區間稱為  $J$ ，且於  $J$  中對所有  $x$  而言， $r(x)$  為零（有時亦可表示為  $r(x) \equiv 0$ ）。則常微分方程式 (1) 式可被簡化如下：

$$(2) \quad y' + p(x)y = 0$$

此式即稱為齊次（homogeneous），並可由分離變數及積分計算得：

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \text{因此} \quad \ln |y| = -\int p(x)dx + c^*$$

再對上式等號之兩側取指數，於是可求得齊次常微分  
方程式(2) 式之通解如下：

$$(3) \quad y(x) = ce^{-\int p(x)dx} \quad (c = \pm e^{c^*} \text{ 當 } y \geq 0)$$

此時我們亦可選擇  $c = 0$ ，因而可得此區間內之所有  $x$ ，  
均為不具重要意義之解 (trivial solution)  $y(x) = 0$ 。

# 非齊次線性常微分方程式 (NONHOMOGENEOUS LINEAR ODE)

若區間  $J$  中之所有  $x$  並非全為零，亦即  $r(x)$  於 (1) 式內並不等於零，則此時之常微分方程式 (1) 式稱為非齊次 (nonhomogeneous) 常微分方程式。在此種情形時之 (1) 式形式，具有僅與  $x$  相關之積分因子。於是我們可由上一節之定理 1 進行尋找積分因子  $F(x)$ 。首先，我們將 (1) 式乘以  $F(x)$ ，即可獲得：

$$(1^*) \quad Fy' + pFy = rF$$

若滿足下式，則上式之左側可視為為  $Fy$  乘積之導數  
 $(Fy)' = F'y + Fy'$

$$pFy = F'y \quad \text{因此} \quad pF = F'$$

接著由分離變數可得  $dF/F = p dx$ ，然後再積分運算，並  
令  $h = \int p dx$ ，即可求得：

$$\ln|F| = h = \int p dx \quad \text{故可得} \quad F = e^h$$

現將上式求得之  $F$  與  $h' = p$  共同代入，則 (1\*) 式成為：

$$e^h y' + h' e^h y = e^h y' + (e^h)' y = (e^h y)' = r e^h$$

再將上式積分，可得：

$$e^{hy} = \int e^{hr} dx + c$$

最後將上式兩側除以 $e^h$ ，則我們可獲得求解公式如下：

$$(4) \quad y(x) = e^{-h} \left( \int e^{hr} dx + c \right), \quad h = \int p(x) dx$$

此時已將 (1) 式之計算化簡為較簡單之積分工作，但對於某些無法以微積分方法求解之常微分方程式，則仍需利用數值分析方法。



由 (4) 式可知，數學式子組成盎然有趣，只有  $c$  與初始條件唯一相關，因此可將 (4) 式整理成兩個項的和，其即如下所示：

$$y(x) = e^{-h} \int e^h r dx + ce^{-h}$$

---

因此我們歸納出：

(5) 總輸出響應 = 輸入  $r$  之響應 + 初始資料之響應

---

# 範例1 一階常微分方程式、通解、 初始值問題

試計算初始值問題：

$$\underline{y' + y \tan x = \sin 2x \quad y(0) = 1}$$

解

對照 (1) 式可知， $p = \tan x$  且  $r = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ，  
故由 (4) 式可求得  $h$ ：

$$\underline{h = \int p \, dx = \int \tan x \, dx = \ln |\sec x|}$$

而由(4) 式亦知：

$$e^h = \sec x, \quad e^{-h} = \cos x, \quad e^h r = (\sec x)(2 \sin x \cos x) = 2 \sin x$$

# 範例1 (續)

因此可求得本微分方程式之通解：

$$y(x) = \cos x \left( 2 \int \sin x dx + c \right) = c \cos x - 2 \cos^2 x$$

由上式及初始條件  $1 = c \cdot 1 - 2 \cdot 1^2$ ，可求得  $c$  值為 3，

因此可進一步求得此例題之特解為  $y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$ 。

在此  $3 \cos x$  即為初始資料之響應，而  $-2 \cos^2 x$  則為輸入  $\sin 2x$  之響應。

## 範例2 電路學

已知圖 1.15 為  $RL$ - 電路 ( $RL$ -circuit)，並假設此  $RL$  電路係由一 電動勢 (electromotive force, EMF)  $E(t)$ 、電阻 (resistor)  $R$  與 電感 (inductor)  $L$  所構成。該電動勢係由電池提供固定電壓供給該電路， $E = 48 \text{ V}$  (伏特)，且電阻值  $R = 11 \Omega$  及電感值  $L = 0.1 \text{ H}$ ，同時假設該電路之初始電流為零。試建立該電路之數學模型，並將其模型化為常微分方程式形式，以求解電流  $I(t)$  之安培 (amperes) 數，其中  $t$  為時間。

## 範例2 (續)

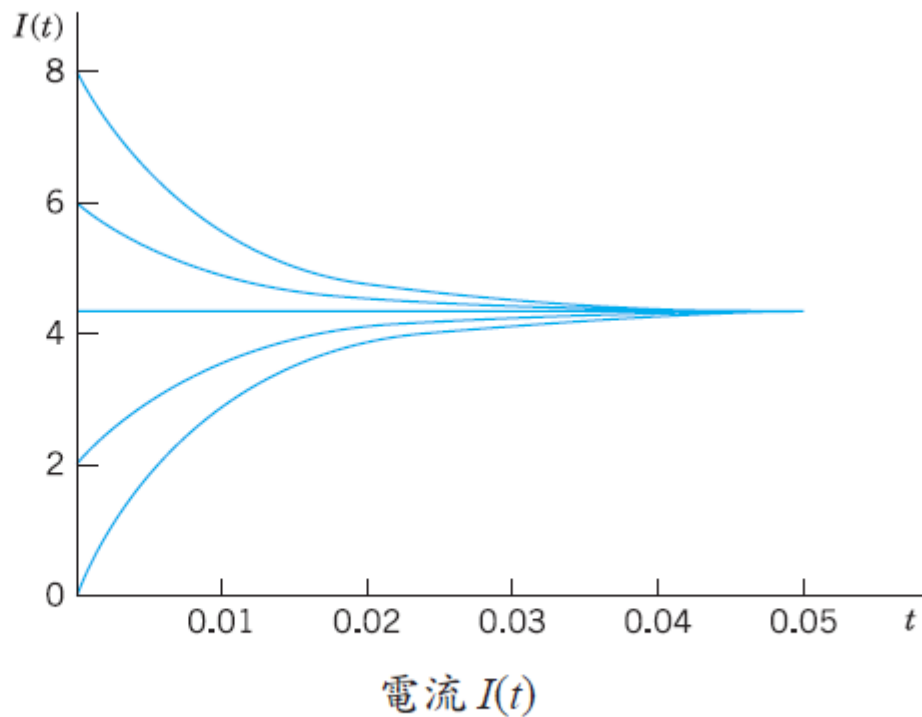
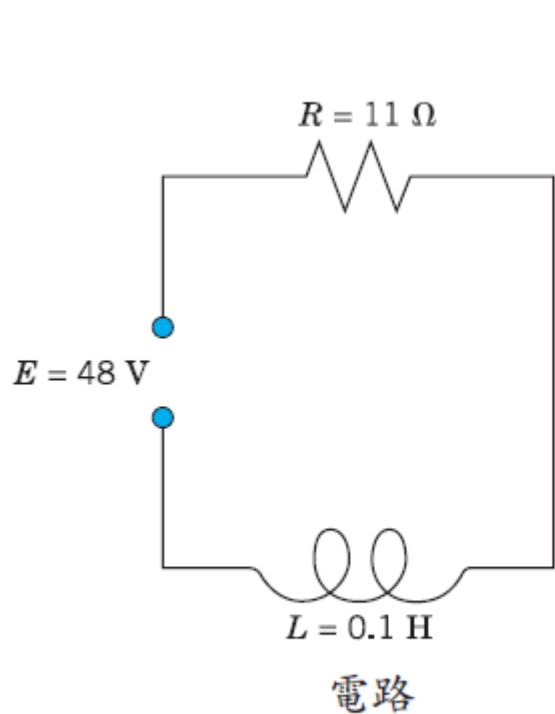


圖 1.15  $RL$  電路

## 範例2 (續)

**物理定律**：當電路中之電流  $I$  流經電阻，將於電阻兩端產生 **壓降** (voltage drop)  $RI$  [ 參閱 **歐姆定律** (Ohm's law) ] ；而當電流  $I$  流經導體 (conductor) 時，亦將於導體兩端產生壓降  $LI' = L di/dt$  。因此該電路於電阻與電感所產生之壓降總和將等於電動勢 [ **克西荷夫電壓定律** (Kirchhoff's Voltage Law, KVL) ] 。

**附註**：一般 KVL 定律敘述「當電壓 (電動勢 EMF) 供給一封閉迴路時，則該電壓的大小將等於電流流經封閉迴路之所有電路元件所產生之總壓降。」

## 範例2 (續)

解

根據 KVL 定律可知，該  $RL$  電路之模型可表示為  $LI' + RI = E(t)$ ，我們可將該模型表示為標準常微分方程式如下：

$$(6) \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

再經線性常微分方程式 (4) 式，可將 (6) 式中相關變數與符號寫為  $x = t$ 、 $y = I$ 、 $p = R/L$  與  $h = (R/L)t$ ，即可求得通解：

$$I = e^{-(R/L)t} \left( \int e^{(R/L)t} \frac{E(t)}{L} dt + c \right)$$

## 範例2 (續)

將上式積分後，可得：

$$(7) \quad I = e^{-(R/L)t} \left( \frac{E}{L} \frac{e^{(R/L)t}}{R/L} + c \right) = \frac{E}{R} + ce^{-(R/L)t}$$

此時將本題之電阻值  $R$ 、電感值  $L$  與電動勢  $E$  之值代入，可求得  $R/L = 11/0.1 = 110$  且  $E(t) = 48/0.1 = 480 =$  常數。因此該電路之電流  $I$  為：

$$I = \frac{48}{11} + ce^{-110t}$$

若已知初始值  $I(0) = 0$ ，可求得  $c = -E/R$ ，亦即  $I(0) = E/R + c = 0$ ，進而求得特解如下：

$$(8) \quad I = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad \text{因此可得} \quad I = \frac{48}{11}(1 - e^{-110t})$$



$I(0) < 48/11$  電流逐漸增到限定值  
 $I(0) > 48/11$  電流逐漸遞減限定值

## 範例3 荷爾蒙之濃度準位

若已知某病患血液之荷爾蒙濃度準位係隨時間變化，且假設其時間變化率，係等於甲狀腺 24 小時期間之正弦曲線輸入率與連續移除率之差值，其中此連續移除率與目前荷爾蒙準位成正比變化。試建立血液之荷爾蒙濃度準位模型，並找出通解，同時請依適當初始條件，求出特解。

## 範例3 (續)

解

**步驟 1：問題建模。** 令  $y(t)$  為時間  $t$  之荷爾蒙濃度準位，則移除率為  $Ky(t)$ ，輸入率為  $A + B \cos \omega t$ ，其中  $\omega = 2\pi/24 = \pi/12$ ， $A$  為平均輸入率，在此  $A \geq B$ ，以使輸入率為非負值。而上述常數  $A$ 、 $B$  與  $K$  之值，則可由實際量測獲得，因此可將該模型表示為線性常微分方程式如下：

$$y'(t) = \text{輸入} - \text{輸出} = A + B \cos \omega t - Ky(t), \text{ 故可得 } y' + Ky = A + B \cos \omega t$$

接著為求得上述模型之特解  $y_{\text{part}}$ ，本題選擇適當之初始狀態，並即令早上六點之  $t = 0$ ，於是初始條件為  $y_{\text{part}}(0) = y_0$ 。

## 範例3 (續)

**步驟 2：求取通解。**由本節 (4) 式與本方程式相較，可得  $p = K = \text{常數}$ 、 $h = Kt$ 、 $r = A + B \cos \omega t$ ，因此由 (4) 式可求得通解如下：

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{-Kt} \int e^{Kt} (A + B \cos \omega t) dt + ce^{-Kt} \\&= e^{-Kt} e^{Kt} \left[ \frac{A}{K} + \frac{B}{K^2 + \omega^2} (K \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] + ce^{-Kt} \\&= \frac{A}{K} + \frac{B}{K^2 + (\pi/12)^2} \left( K \cos \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi t}{12} \right) + ce^{-Kt}\end{aligned}$$

## 範例3 (續)

在上式中，隨著時間  $t$  之增加，不論  $c$  值為何，該式之最後一項將遞減至 0。因此除了最後一項之外，上式其他部分乃由常數與週期項組成，又稱為**穩態解** (steady-state solution)；但對於  $y(t)$  之完整解，則我們稱為**暫態解** (transient-state solution)，因為它係針對靜止至穩定之狀態轉換情形加以建模。至於此方程式之各項，亦常用於描述與時間相關之物理系統。

## 範例3 (續)

**步驟 3：求取特解。**於  $y(t)$  中設定  $t = 0$  並選擇  $y_0 = 0$ ，則可得：

$$y(0) = \frac{A}{K} + \frac{B}{K^2 + (\pi/12)^2} \frac{u}{\pi} K + c = 0$$

$$\text{因此 } c = -\frac{A}{K} - \frac{KB}{K^2 + (\pi/12)^2}$$

將上式計算結果代入  $y(t)$ ，則我們可求得特解如下：

$$y_{\text{part}}(t) = \frac{A}{K} + \frac{B}{K^2 + (\pi/12)^2} \left( K \cos \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi t}{12} \right) - \left( \frac{A}{K} + \frac{KB}{K^2 + (\pi/12)^2} \right) e^{-Kt}$$

該式之穩態部分與步驟 2 所述相同。而若針對各常數給定數值後，便可進行繪圖，如選定  $A = B = 1$  與  $K = 0.05$ ，即可繪如圖 1.16 所示。

## 範例3 (續)

由圖可知，因暫態週期相當短，故曲線很快呈現正弦形狀，此即為方程式對輸入  $A + B \cos(\frac{1}{12} \pi t) = 1 + \cos(\frac{1}{12} \pi t)$  之響應。

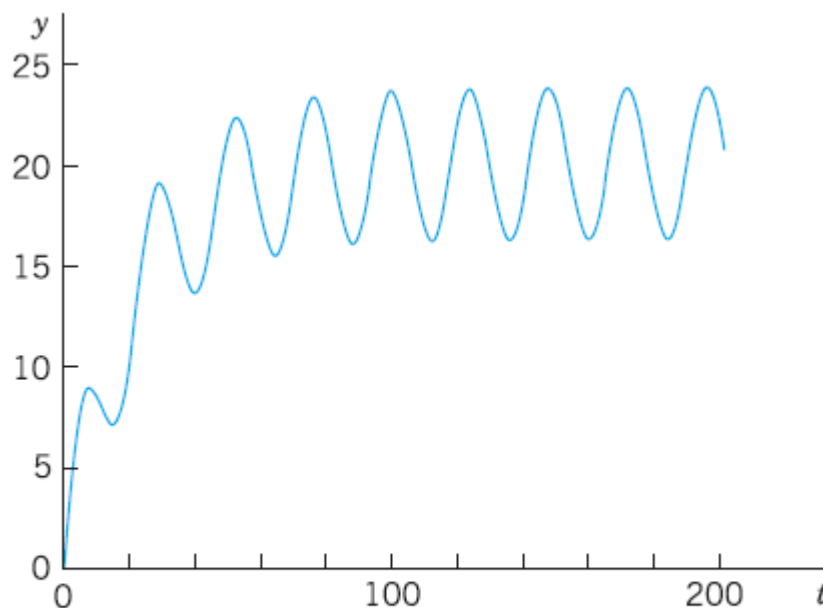


圖 1.16 範例 3 之特解

# 簡化為線性形式，白努利方程式

目前許多模型建立，並非線性常微分方程式，但可經由轉換方式將其轉化為線性常微分方程式。其中白努利方程式（Bernoulli equation）為這些有用的轉換方法之一，其表示方式如下：

$$(9) \quad y' + p(x)y = g(x)y^a \quad (a \text{ 為任意實數})$$

假若  $a = 0$  或  $a = 1$ ，則 (9) 式為線性方程式；反之，則為非線性方程式。我們接著令：

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$



再將上式微分及將 (9) 式之  $y'$  代入，於是可得：

$$u' = (1 - a)y^{-a}y' = (1 - a)y^{-a}(gy^a - py)$$

將上式簡化可得：

$$u' = (1 - a)(g - py^{1-a})$$

由於上式等號之右側為  $y^{1-a} = u$ ，因此我們可求得線性常微分方程式為：

(10)

$$u' + (1 - a)pu = (1 - a)g$$

## 範例4 運籌規劃方程式

試求解下列白努利方程式，此亦稱為運籌規劃方程式（logistic equation）或佛赫斯特方程式（Verhulst equation）：

$$(11) \quad y' = Ay - By^2$$

解

首先將 (11) 式整理如 (9) 式，形式如下：

$$y' - Ay = -By^2$$

此時可觀察得知  $a = 2$ ，故  $u = y^{1-a} = y^{-1}$ ，接著對  $u$  微分，並將 (11) 式之  $y'$  代入：

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(Ay - By^2) = B - Ay^{-1}$$

## 範例4 (續)

上式之最後一項為  $-Ay^{-1} = -Au$ ，因此我們可表示為線性常微分方程式如下：

$$u' + Au = B$$

而其通解即為（由 (4) 式可求得）：

$$u = ce^{-At} + B/A$$

又由於  $u = 1/y$ ，故可求得 (11) 式之通解為：

$$(12) \quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{ce^{-At} + B/A} \quad (\text{如圖1.17 所示})$$

若直接觀察 (11) 式，我們可看出  $y \equiv 0$ （對所有  $t$  而言， $y(t) = 0$ ）亦為一解。

## 範例4 (續)

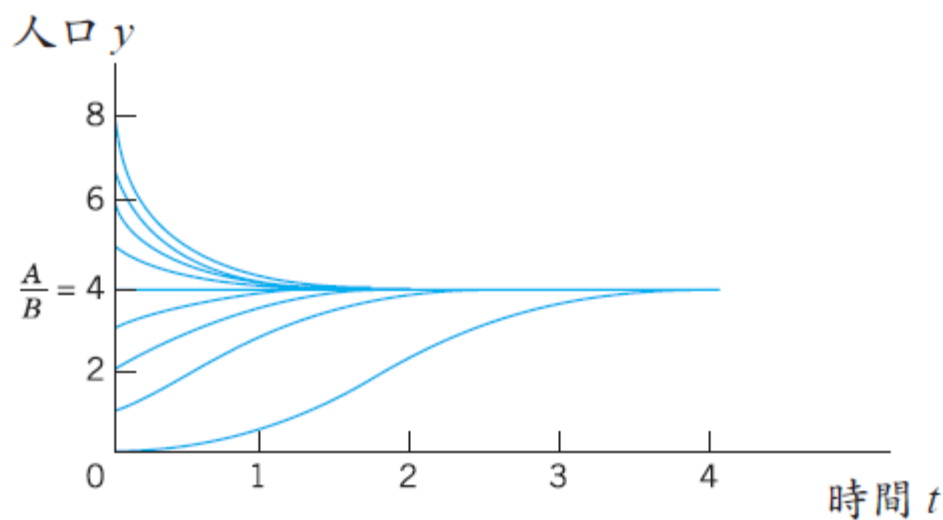


圖 1.17 運籌規劃之人口模型。範例 4 中之 (9) 式曲線，其中  $A/B = 4$

# 人口動力學

## ( POPULATION DYNAMICS )

於人口動力學中，運籌規劃方程式 (11) 式具有重要角色。倘若  $B = 0$ ，(11) 式為  $y' = dy/dt = Ay$ ，此時求解可得 (12) 式之  $y = (1/c) e^{At}$ ，**呈現指數成長**。此式又稱為**馬修斯定律** (Malthus's law)。

此外，(11) 式中之  $-By^2$  為**抑制項** (braking term)，**亦即用於代表抑制人口之無限成長**。而事實上若將 (11) 式寫成  $y' = Ay[1 - (B/A)y]$ ，則當  $y < A/B$  時， $y' > 0$ ；因此在  $y < A/B$  時，族群持續成長；惟一旦  $y > A/B$  時， $y' < 0$ ，則在  $y > A/B$  時，將使得族群人口減少。上述兩種情況之極限值同為  $A/B$ ，此可由圖1.17 觀察得知。

## 範例5 穩定與非穩定的平衡解，相線圖

由圖 1.18 繪製之方向場可知，常微分方程式  $y' = (y - 1)(y - 2)$  具有穩定的平衡解  $y_1 = 1$ ，以及非穩定的平衡解  $y_2 = 2$ ，其中  $y_1$  與  $y_2$  均為圖中拋物線（parabola） $f(y) = (y - 1)(y - 2)$  之零點。今若已知該常微分方程式為自主型方程式，因此可將方向場匯整至相線圖（phase line plot），以求得  $y_1$  與  $y_2$  及方向場中之箭頭方向（向上或向下），進而可提供平衡解之穩定性或不穩定性之相關資訊。

# 範例5 (續)

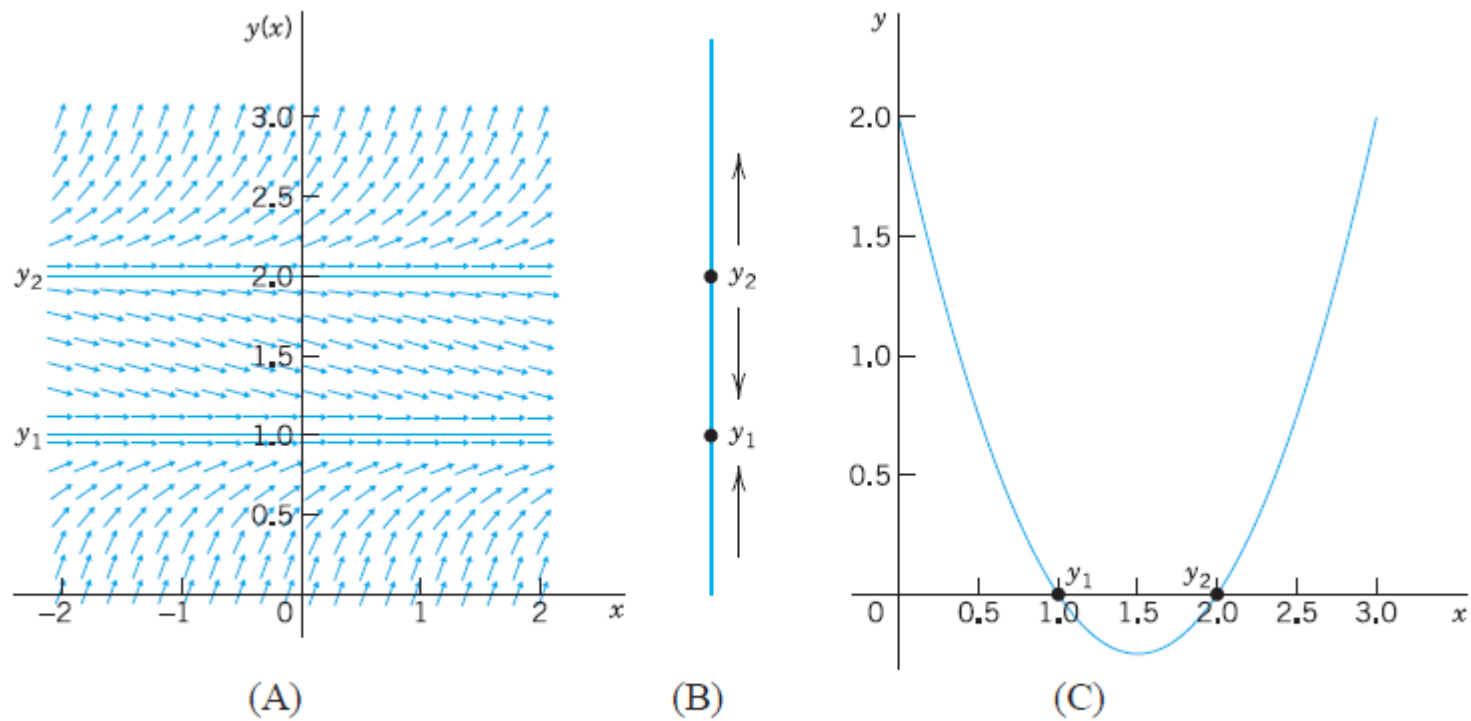


圖 1.18 範例 5 (A) 方向場；(B) 相線；(C) 拋物線  $f(y)$