

# 實驗十 薄透鏡與面鏡成像實驗

## 一、 實驗目的：

研習透鏡與面鏡成像原理，並測量其焦距( $f$ )與放大率( $M$ )。

## 二、 實驗儀器：

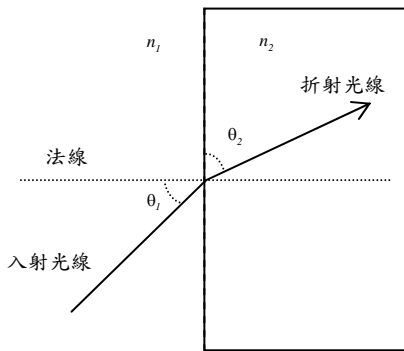
項次	配件名稱	數量	項次	配件名稱	數量
1	凸透鏡 (110/145mm)	各1	2	凹透鏡 (-95mm)	各1
3	凸面鏡 (-55mm)	各1	4	凹面鏡 (75mm)	各1
5	矢形孔與濾光片	1 個	6	屏幕	1 個
7	LED 光源	1 個	8	直流電源供應器(3V)	1 個
9	鏡座	4 個	10	屏幕專用鏡座(插孔偏邊緣)	1 個
11	LED 光源套筒	1 個	12	鏡架	3 個
13	屏幕專用架子(有磁鐵)	1 個	14	軌道	1 個



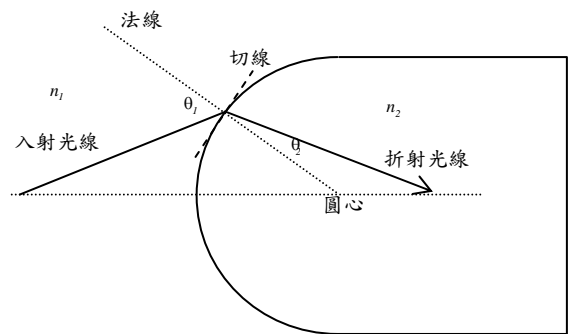
### 三、 實驗原理：

#### ◎ 造鏡者公式推導：

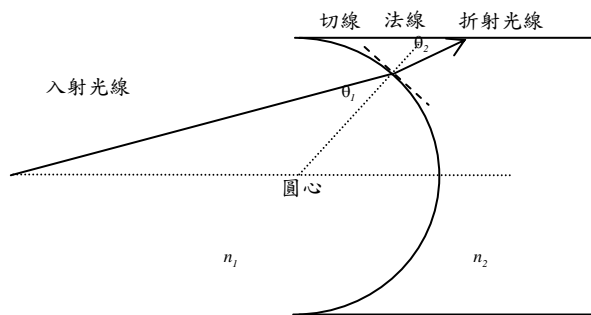
根據折射定律，當光從光速快的介質進入光速慢的介質，折射光線會偏向法線。若介質界面為曲面，則會因為介質界面的彎曲程度（曲率半徑小曲率大）不同而導致折射光線會有偏向光軸或遠離光軸的不同。若折射光線偏向光軸則稱為**聚光**；若折射光線偏離光軸則稱為**散光**。下圖分別表示平面折射、凸球面折射、凹球面折射等三種介質界面的折射現象。



圖一 平面折射  $n_2 > n_1$



圖二 凸球面折射  $n_2 > n_1$



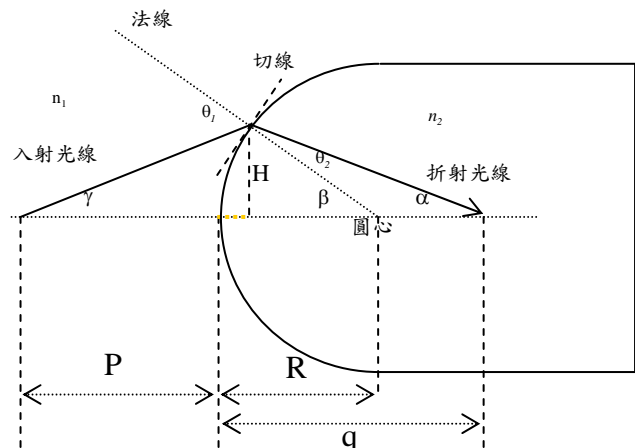
圖二 凹球面折射  $n_2 > n_1$

#### ◎ 單球面折射成像公式

##### (1) 凸球面折射

1. 入射光由  $n_1$  介質經球面折射至  $n_2$  介質如右圖所示。圖中 5 個角度 ( $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ) 的關係根據三角形外角等於兩內對角和。

$$\theta_1 = \beta + \gamma, \quad \theta_2 = \beta - \alpha$$



2. 入射光線均在光軸附近發生折射，所以右圖中 5 個角度 ( $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ) 都很小，因此

$$\theta_1 \cong \sin\theta_1 \cong \tan\theta_1, \quad \theta_2 \cong \sin\theta_2 \cong \tan\theta_2, \quad \alpha \cong \sin\alpha \cong \tan\alpha, \\ \beta \cong \sin\beta \cong \tan\beta, \quad \gamma \cong \sin\gamma \cong \tan\gamma$$

3. 右圖中有三個直角三角形的  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  角的正切函數值為

$$\alpha \cong \tan\alpha = \frac{H}{q}, \quad \beta \cong \tan\beta = \frac{H}{R},$$

$$\gamma \cong \tan\gamma = \frac{H}{p}$$

4. 根據折射定律 (Snell' s law)  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ ，在小角度的情況下可以寫為

$$n_1 \theta_1 \cong n_2 \theta_2$$

$$\Rightarrow n_1(\beta + \gamma) \cong n_2(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow n_1 \left( \frac{H}{R} + \frac{H}{P} \right) \cong n_2 \left( \frac{H}{R} - \frac{H}{q} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} \cong \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

5. 若光線是由  $n_2$  到  $n_1$  介質  
當物距大於半徑 ( $P > R$ )，  
根據折射定律

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$$

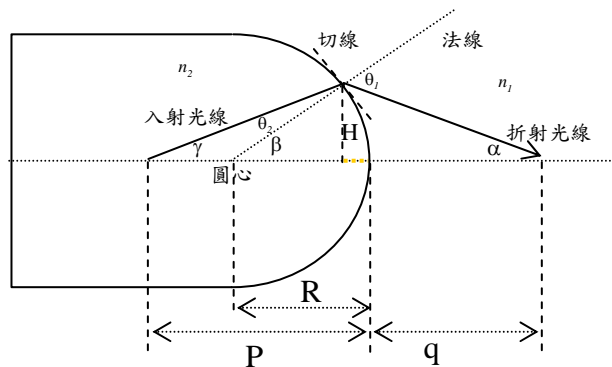
$$n_2 \theta_2 \cong n_1 \theta_1$$

$$\Rightarrow n_2(\beta - \gamma) \cong n_1(\beta + \alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$n_2 \left( \frac{H}{R} - \frac{H}{P} \right) \cong n_1 \left( \frac{H}{R} + \frac{H}{q} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} \cong \frac{n_2 - n_1}{R}}$$



當物距小於半徑 ( $P < R$ )，

根據折射定律

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

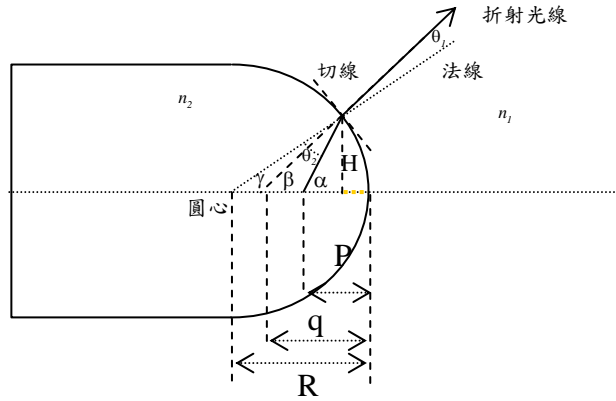
$$n_2 \theta_2 \cong n_1 \theta_1$$

$$\Rightarrow n_2(\alpha - \gamma) \cong n_1(\beta - \gamma)$$

$\Rightarrow$

$$n_2 \left( \frac{H}{p} - \frac{H}{R} \right) \cong n_1 \left( \frac{H}{q} - \frac{H}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{-q} \cong \frac{n_2 - n_1}{R}}, \quad -q \text{ 代表虛像。}$$



## (2) 凹球面折射：

根據折射定律

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 \theta_1 \cong n_2 \theta_2$$

$$\Rightarrow n_1(\alpha - \gamma) \cong n_2(\alpha - \beta)$$

$\Rightarrow$

$$n_1 \left( \frac{H}{R} - \frac{H}{p} \right) \cong n_2 \left( \frac{H}{R} - \frac{H}{q} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{-q} \cong \frac{n_2 - n_1}{-R}}, \quad -R$$

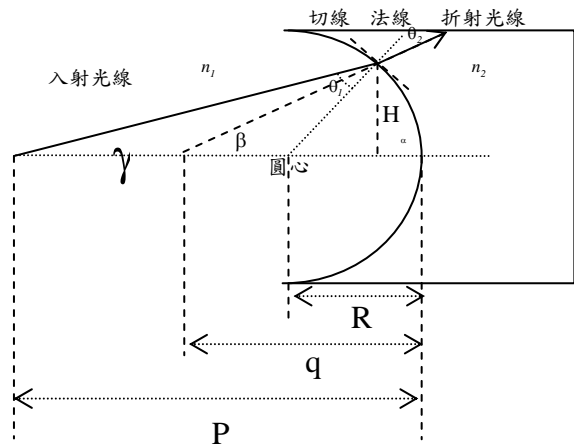
代表凹球面

綜合以上各種球面折射公式，可以下式表示

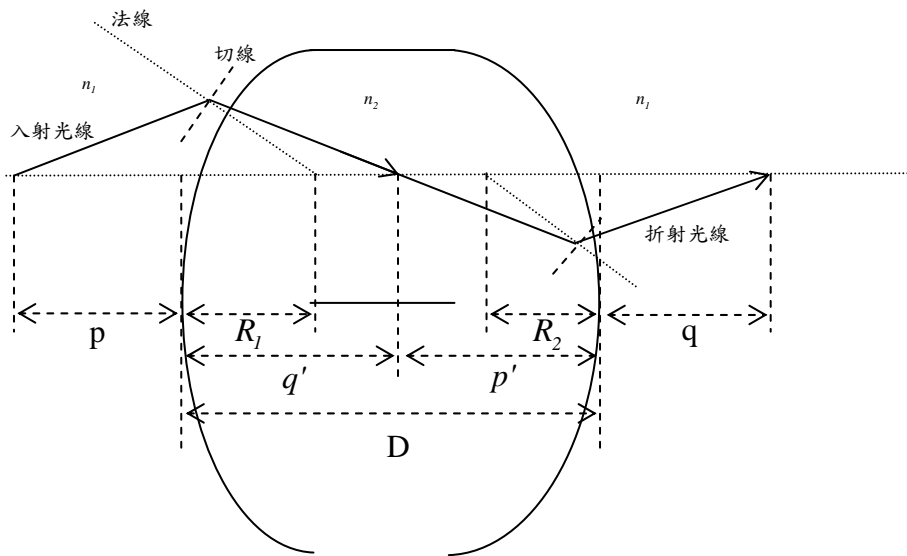
$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} \cong \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

當像距  $q$  為正時表示「實像」，當像距  $q$  為負時表示「虛像」

當半徑  $R$  為正時表示「凸球面折射」，當半徑  $R$  為負時表示「凹球面折射」



◎ 薄透鏡造鏡者公式



當兩凸球面組成一透鏡，物體（物距  $p$ ）光線經兩凸球面的折射而到達右側成像位置（像距  $q$ ）。依據單球面折射公式，可將兩次折射表示為

$$\text{左側凸球面折射 } \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} \cong \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$\text{右側凸球面折射 } \frac{n_1}{q} + \frac{n_2}{p'} \cong \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad (\text{依據光的可逆性，可看成光線由右側到左側})$$

由上圖中知透鏡厚度  $D = q' + p'$ ，因此  $q' = D - p'$ 。因為討論的透鏡甚薄（ $D \cong 0$ ），所以  $q' \cong -p'$ ，將此式代入上列二式可得

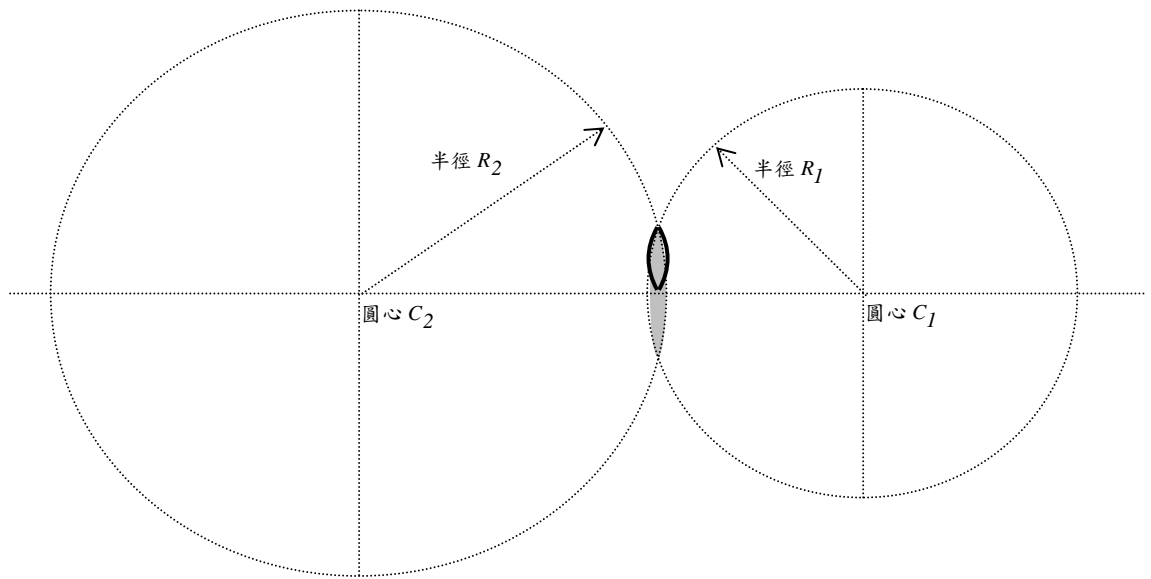
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{-p'} \cong \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \quad \frac{n_1}{q} + \frac{n_2}{p'} \cong \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad \text{將左列二式相加得}$$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} \cong (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cong \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad \text{此式稱為薄透鏡的造鏡者公式}$$

當薄透鏡置於空氣中（空氣折射率近似 1，上式折射率  $n_1 \cong 1$ ）， $R_1$ 、 $R_2$  分別代表透鏡兩曲面的曲率圓半徑，如下圖所示。造鏡者公式則可寫為

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cong (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

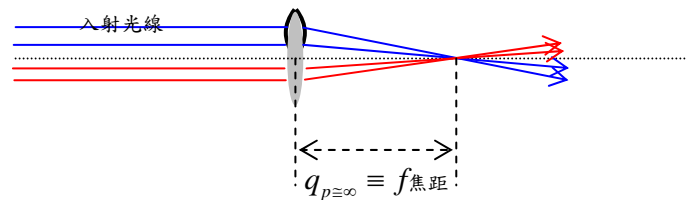


### ◎ 薄透鏡成像公式

根據前述所得的造鏡者公式，若物距為無窮遠，則來自物體的光線將與光軸平行，只要是平行光都具有相同的像距  $q_{p=\infty}$ 。因此，將此像距定義為焦距  $f$ 。由造鏡者公式推導出

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} \cong (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q_{p=\infty}} \cong (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \equiv \frac{1}{f_{\text{焦距}}}$$



從此式可以看出，所以薄透鏡造鏡者公式可改寫為薄透鏡成像公式

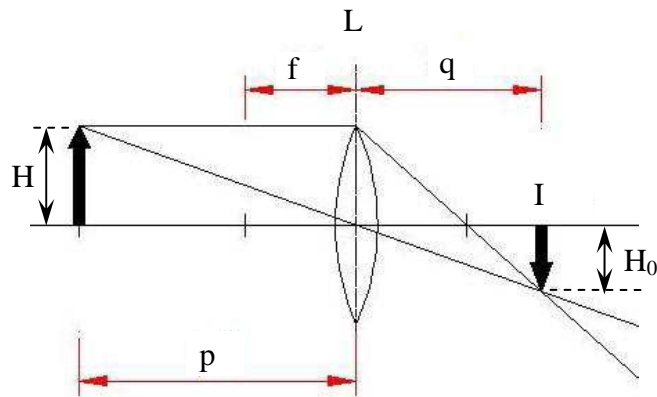
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cong \frac{1}{f} \quad , \quad \text{其中} \quad \frac{1}{f} \equiv (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

透鏡焦距  $f$  的值可以依據透鏡材質的折射率及兩側曲面的曲率半徑來調整。要特別注意的是當曲面為凹球面時，曲率半徑要取「負值」。因此焦距亦有正負值之別。正焦距者可稱為凸透鏡或聚光透鏡；負焦距者可稱為凹透鏡或散光透鏡。

#### 四、 實驗方法：

##### (一)凸透鏡成像：

一物體置於凸透鏡(L)前，當此物體每一點所發的光線抵達凸透鏡時，光線會依折射定律而改變方向，穿過透鏡後，在鏡後匯聚成像而成「實像(I)」，如圖一所示。



圖一 凸透鏡成像示意圖

- $p$  : 物距，物體至鏡面之距離。(  $p$  在透鏡前為+，鏡後為- )  
 $q$  : 像距，像至鏡面之距離。(  $q$  在透鏡前為-，鏡後為+ )  
 $f$  : 焦距，透鏡的「焦距」。(凸透鏡的焦距  $f$  一定為+)  
 $H$  : 物高。  
 $H_0$  : 像高。

根據光的折射定律，三角函數和近似值，可推導出凸透鏡的成像公式：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

而放大率  $M$  則為：

$$M = q/p \quad (2)$$

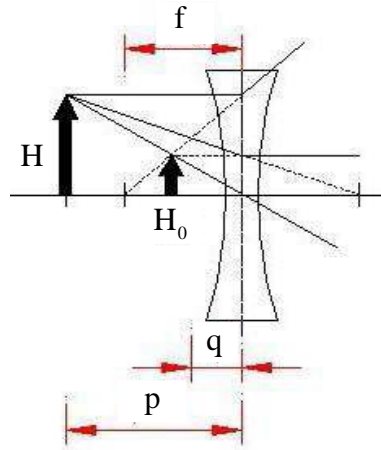
或

$$M = H/H_0 \quad (3)$$

在實驗中，先調整物距  $p$ ，量得像距  $q$  後，利用公式(1)可算出凸透鏡的焦距，並可利用公式(2)或(3)算得成像放大率。

(二)凹透鏡成像：

一物體置於凹透鏡前，當此物體每一點所發出的光線抵達凹透鏡時，光線會依折射定律而改變方向，穿過透鏡後發散，其延長線相交於鏡前而成「虛像」，如圖二所示。



圖二 凹透鏡成像示意圖

- p : 物距，物體至鏡面之距離。(p 在透鏡前為+，鏡後為-)  
q : 像距，像至鏡面之距離。(q 在透鏡前為-，鏡後為+)  
f : 焦距，透鏡的「焦距」。(凹透鏡的焦距 f 一定為-)  
H : 物高。  
H<sub>0</sub> : 像高。

根據光的折射定律，三角函數和近似值，可推導出凸透鏡的成像公式：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (4)$$

而放大率 M 則為：

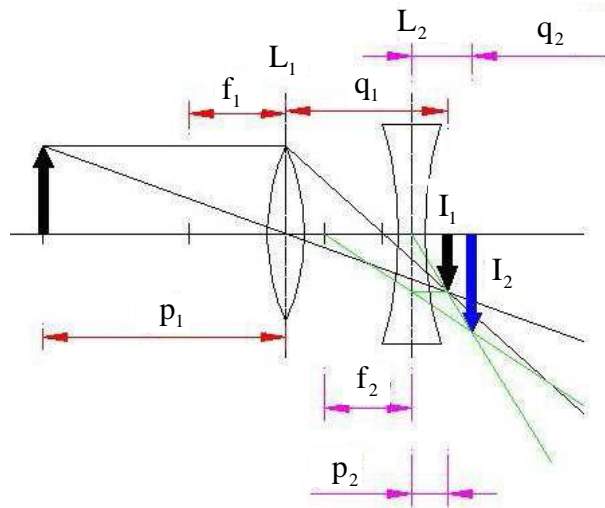
$$M = \frac{q}{p} \quad (5)$$

或

$$M = \frac{H}{H_0} \quad (6)$$

但實驗中，因凹透鏡成像為虛像，故必須先藉助一個凸透鏡 L<sub>1</sub> 成立一個實像 I<sub>1</sub>，I<sub>1</sub> 再透過凹透鏡 L<sub>2</sub> 才能形成實像 I<sub>2</sub>，如圖三所示。



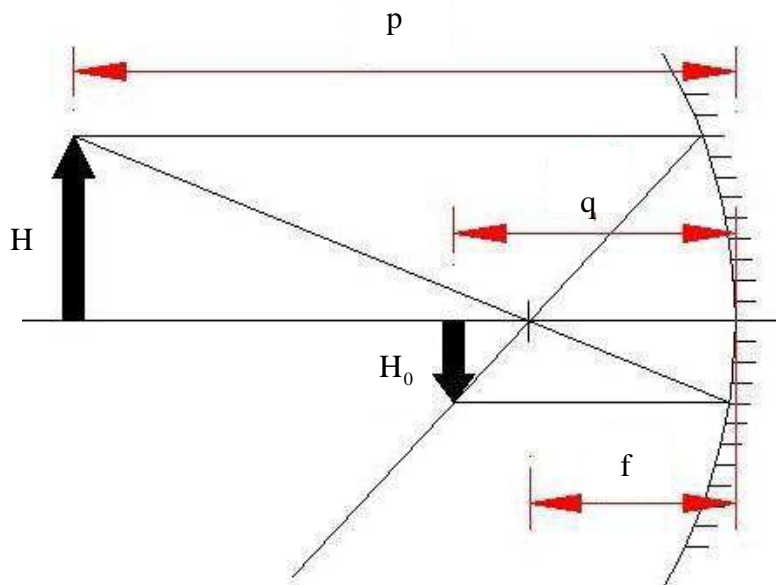


圖三 凸凹透鏡成像示意圖

因此先量物距  $p$ ，再量得像距  $q$ ，利用公式 (4) 可算出凹透鏡的焦距，並可利用公式 (5) 或 (6) 獲得成像放大率。

(三) 凹面鏡成像：

一物體置於凹面鏡前，當此物體每一點所發的光線抵達凹面鏡時，光線會依反射定律而改變方向，透過反射後在鏡前匯聚成「實像」，如圖四所示：



圖四 凹面鏡成像

- p : 物距，物體至鏡面之距離。(p 在透鏡前為+，鏡後為-)  
 q : 像距，像至鏡面之距離。(q 在透鏡前為-，鏡後為+)  
 f : 焦距，透鏡的「焦距」。(凸透鏡的焦距 f，一定為+)

根據光的反射定律，三角函數和近似值，可推導出凹面鏡的成像公式：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \quad (7)$$

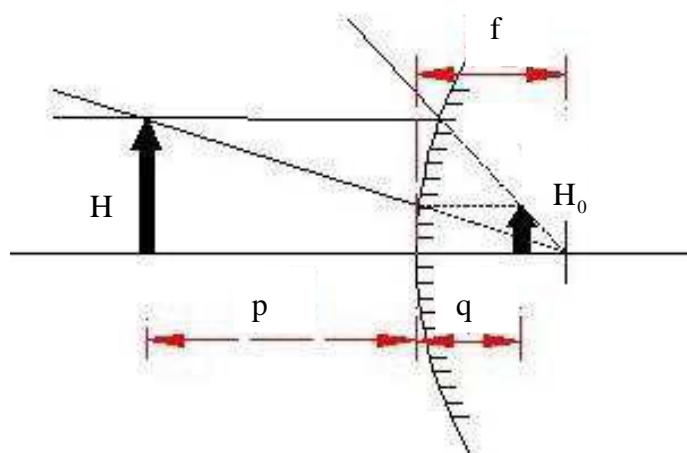
此處 r 為曲率半徑。而放大率 M 則為：

$$M = \frac{q}{p} \quad (8)$$

在實驗中，先調整物距 p，量得像距 q 後，利用公式 (7) 可算出凸透鏡的焦距 f 及曲率半徑 r，並可利用公式 (8) 算得成像放大率。

#### (四)凸面鏡成像：

一物體置於凸面鏡前，當此物體每一點所發的光線抵達凸面鏡時，光線會依反射定律而改變方向，反射後在鏡前發散，發散延長線相交於鏡後而成「虛像」，如(圖五)所示：



圖五 凸面鏡成像

- p : 物距，物體至鏡面之距離。(實物為+，虛物為-)  
 q : 像距，像至鏡面之距離。(鏡前實像為+，鏡後虛像為-)  
 f : 焦距，面鏡的「焦距」。(凹面鏡為+，凸面鏡為-，平面鏡為無限大)

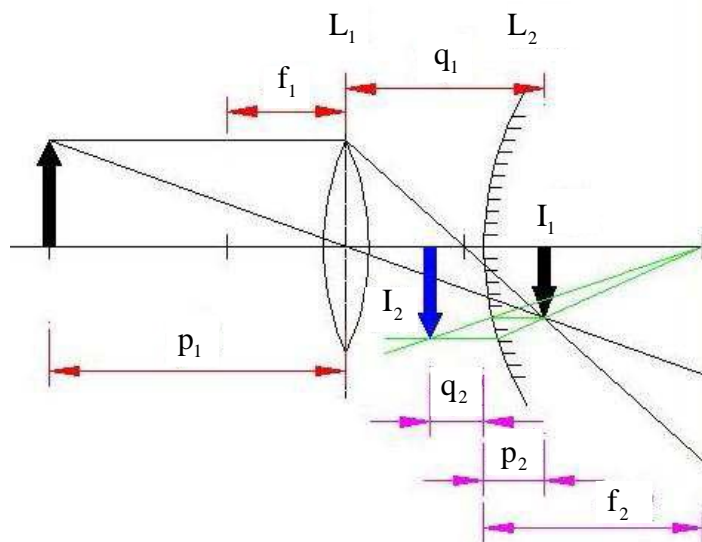
根據光的反射定律，三角函數和近似值，可推導出凹面鏡的成像公式：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \quad (9)$$

此處  $r$  為曲率半徑。而放大率  $M$  則為：

$$M = \frac{q}{p} \quad (10)$$

但實驗中，因凸面鏡成像為虛像，故必須先藉助一個凸透鏡  $L_1$  成立一個實像  $I_1$ ，再將  $I_1$  當成凸面鏡  $L_2$  鏡後的虛像，根據光的可逆性，在凸面鏡的前方形成實像  $I_2$ ，如圖六所示：

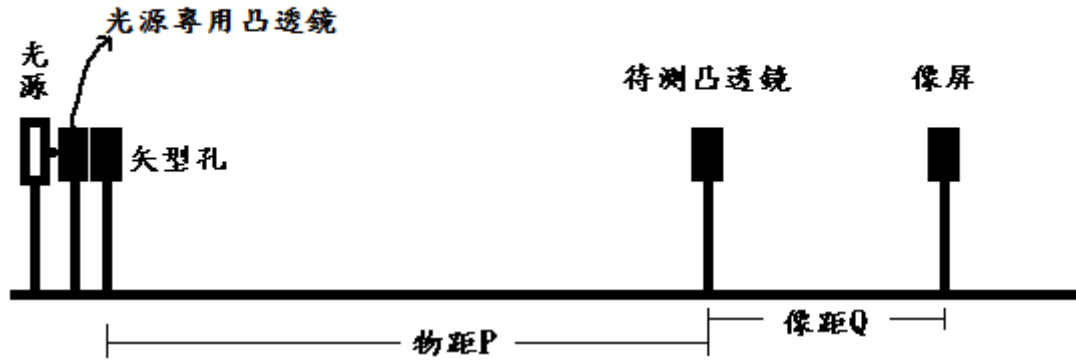


圖六 凸透鏡與凸面鏡成像示意圖

在實驗中，先調整物距  $p_2$ ，量得像距  $q_2$  後，利用公式 (9) 可算出凸透鏡的焦距  $f$  及曲率半徑  $r$ ，並可利用公式 (10) 算得成像放大率。

## 五、 實驗安裝方法和操作步驟：

### (一) 凸透鏡成像：

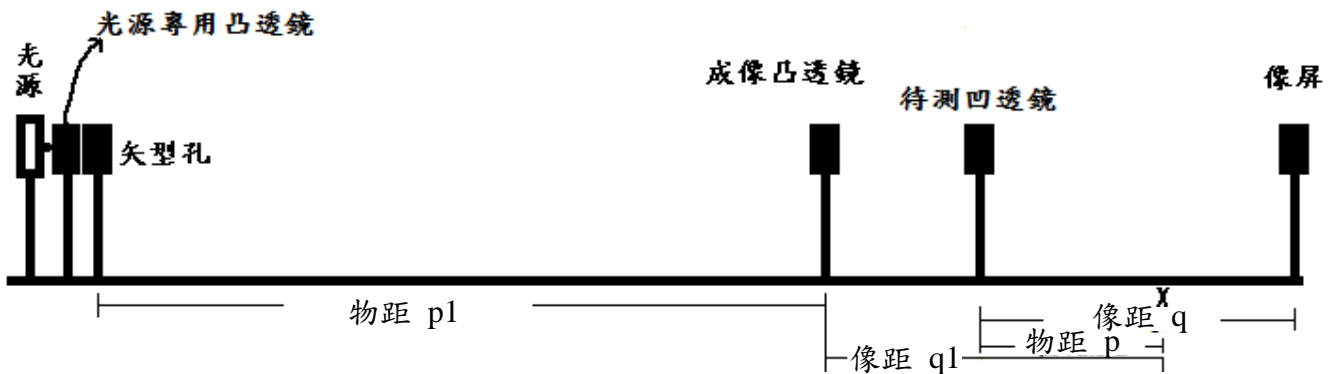


圖七 凸透鏡成像安裝圖

1. 儀器裝設如圖七所示，先將 LED 光源安置在光學平台左側，套上光源專用凸透鏡，然後安裝矢型孔於光源右側，光源與矢型孔盡量緊密。測量矢形孔的高度(物高)記為  $H_0$ 。
2. 將像屏安裝在光學平台最右側。待測凸透鏡 ( $f = +110 \text{ mm}$ ) 安裝在矢形孔與像屏之間，調整待測凸透鏡與矢形孔間的距離(物距  $p$ )為  $20.0 \text{ cm}$ ，打開光源並調整光軸，使光通過矢形孔，再穿過凸透鏡到達像屏，移動像屏使其上所生之矢形孔像最清晰為止(可適當調整光源或透鏡高度)，測量此時像屏與待測凸透鏡的距離(像距  $q$ )，及像屏上矢形孔成像的高度(像高)記為  $H$ ，並記錄之。
3. 依次將物距調整為  $22.5 \text{ cm}$ 、 $25.0 \text{ cm}$ 、 $27.5 \text{ cm}$  及  $30.0 \text{ cm}$  得相對應的像距，重複步驟 2。
4. 從量得的物距與像距，利用公式(1)算出凸透鏡的焦距與公式、公式(2)及(3)算出放大率。得到的焦距值可與凸透鏡上的標示值比較之，而利用公式(2)所得的放大率可與公式(3)所得的放大率做比較。
5. 取另一待測凸透鏡( $f=+145 \text{ mm}$ )，重複步驟 2，但調整待測凸透鏡與矢形孔間的距離(物距  $p$ )為  $29.0 \text{ cm}$ 、 $33.0 \text{ cm}$ 、 $37.0 \text{ cm}$ 、 $41.0 \text{ cm}$  及  $45 \text{ cm}$ ，再重複步驟 4。

(二) 凹透鏡成像：(虛物成實像)

1. 參照凸透鏡成像方法(圖七)先建立一個實像。
2. 為了減少實像誤差，可用理論公式調整像距。
  - (a) 選取凸透鏡 ( $f=110$ )
  - (b) 設定物距 ( $p_1$ )
  - (c) 計算像距 ( $q_1$ )
  - (d) 計錄像高(此像高為凹透鏡程成像的物高  $H_0$ )
  - (e) 記下此時像屏的座標為 X

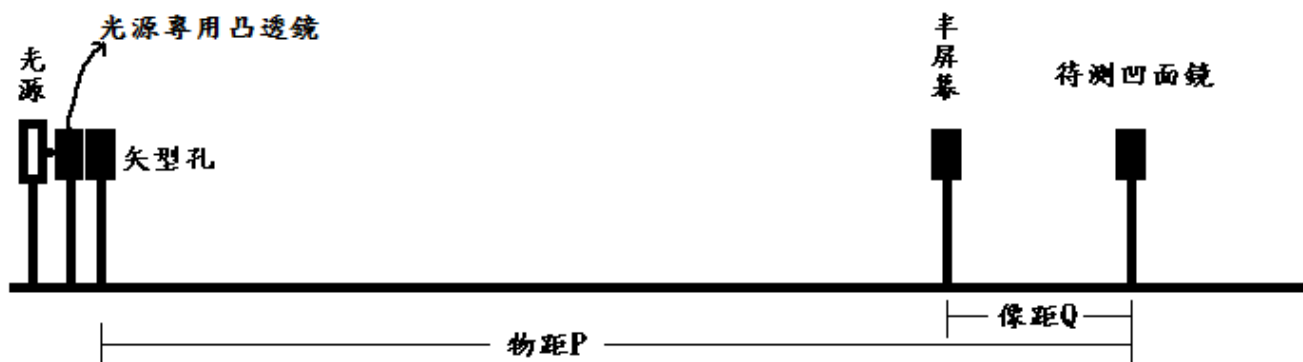


圖八 凹透鏡成像安裝圖

3. 利用光的可逆性原理，把成像凸透鏡的實像，當成凹透鏡的虛物。如圖八所示，在凸透鏡與 X 之間放置一個待測凹透鏡( $f= -95$  mm)，而 X 與待測凹透鏡間的距離成為新的物距  $p$ 。我們調整新的物距  $p$  為  $-4.0$  cm (即待測凹透鏡在座標 X 左側  $4.0$  cm)，移動像屏使其上所生之矢形孔像最清晰為止，測量此時像屏與待測凹透鏡的距離(像距  $p$ )，並記錄之。
4. 測量像屏上矢形孔成像的高度(像高)記為  $H$ ，則由公式(6)得知該凹透鏡的放大率  $M = H/H_0$  (即:放大率 = 像高/物高)。
5. 此時我們不改變成像凸透鏡的位置，其透鏡的成像依舊在座標 X 上，我們依序調整凹透鏡到座標 X 的距離為  $-4.5$  cm、 $-5.0$  cm、 $-5.5$  cm 及  $-6.0$  cm，重複步驟 3、4，並一一記錄之。
6. 從量得的物距  $p$  與像距  $q$ ，利用公式(4)算出凹透鏡的焦距與公式(5)算出放大

率。得到的焦距值可與凹透鏡上的標示值比較之，而利用公式(5)所得的放大率可與公式(6)所得的放大率做比較。

### (三) 凹面鏡成像：

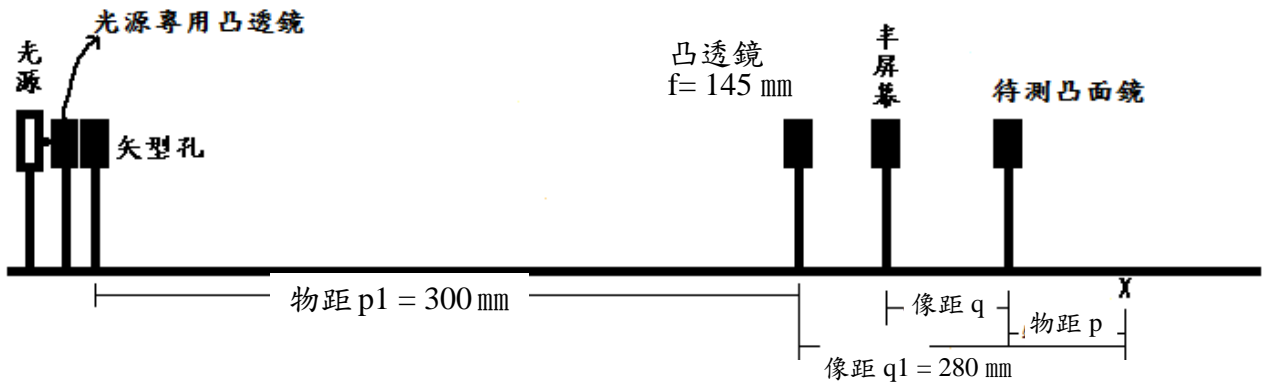


圖九 凹面鏡成像安裝圖

1. 儀器裝設如圖九所示，先將 LED 光源安置在光學平台左側，套上光源專用凸透鏡，然後安裝矢型孔於光源右側，光源與矢型孔盡量緊密。
2. 將待測凹面鏡安裝在矢形孔右側 30 cm 處(即物距  $p$ )，並將半屏幕安裝在待測凹面鏡與矢型孔間。打開光源並調整光軸，使光透過凹面鏡，反射到達半屏幕上，並移動半屏幕位置使其上之矢形孔像最清晰為止(可適當調整光源或面鏡高度)，測量此時半屏幕與待測凹面鏡的距離(像距  $q$ ，及像高  $H$ ，並記錄之。
3. 依次將物距調整為 35 cm、40 cm、45 cm 及 50 cm，重複步驟 2，即可得相對應的像距  $q$  和像高  $H$ ，一一記錄之。
4. 從量得的像距與像高，利用公式(7)算出凹面鏡的焦距與曲率半徑，並利用公式(8)算出放大率，得到的焦距值可與凹面鏡上的標示值比較之。

### (四) 凸面鏡成像：

1. 參照凸透鏡成像方法(圖七)先建立一個實像。
2. 為了減少實像誤差，可用理論公式調整像距。
  - (a) 選取凸透鏡 ( $f = 145 \text{ mm}$ )
  - (b) 設定物距 ( $p_1 = 300 \text{ mm}$ )
  - (c) 計算像距 ( $q_1 \doteq 280 \text{ mm}$ )
  - (d) 計錄像高(此像高為凸面鏡成像的物高,  $H_0$ )
  - (e) 記下此時像屏的座標為  $X$



圖十 凸透鏡與凸面鏡成像安裝圖

3. 利用光的可逆性原理，把成像凸透鏡的實像，當成凸面鏡的虛像。如圖十所示，在凸透鏡與 X 之間放置一個半屏幕，並將待測凸面鏡置於半屏幕與 X 之間，而 X 與待測凸面鏡間的距離成為新的物距  $p$ 。我們調整  $p$  為  $-3\text{ cm}$  (即在半屏幕與座標 X 之間，離 X 距離  $3\text{ cm}$ )，移動半屏幕使其上所生之矢形孔像最清晰為止，測量此時半屏幕與待測凸面鏡的距離(像距  $q$ )，及像屏上矢形孔成像的高度(像高  $H$ )，並記錄之。
4. 依次將物距調整為  $-3.5\text{ cm}$ 、 $-4.0\text{ cm}$ 、 $-4.5\text{ cm}$  及  $-5\text{ cm}$ ，重複步驟 3，即可得相對應的像距，並一一記錄之。
5. 從量得的物距與像距，利用公式(9)算出凸面鏡的焦距與曲率半徑，並利用公式(10)算出放大率，得到的焦距值可與凸透鏡上的標示值比較之。

### 五、實驗數據與分析：

A. 凸透鏡(一)：						單位：mm
(凸透鏡焦距 $f_0 = +110$ mm)						
物距 P	像距 Q	量測焦距 f	放大率 $M=Q/P$	物高 $H_0$	像高 H	放大率 $M=H/H_0$
200						
225						
250						
275						
300						
平均 f =						

※ 焦距測量百分誤差  $= \frac{|f - f_0|}{f_0} = ( \quad ) \%$

B. 凸透鏡(二)：						單位：mm
(凸透鏡焦距 $f_0 = +145$ mm)						
物距 p	像距 q	量測焦距 f	放大率 $M=q/p$	物高 $H_0$	像高 H	放大率 $M=H/H_0$
290						
330						
370						
410						
450						
平均 f =						

※ 焦距測量百分誤差  $= \frac{|f - f_0|}{f_0} = ( \quad )$

C. 凹透鏡：						單位：mm
(凸透鏡焦距 $F = +110$ mm)						
(待測凹透鏡焦距 $f_0 = -95$ mm) (X 座標 = $\quad$ mm)						
物距 p	像距 q	量測焦距 f	放大率 $M=q/p$	物高 $H_0$	像高 H	放大率 $M=H/H_0$
-400						
-450						
-500						
-550						
-600						
平均 f =						

※ 焦距測量百分誤差  $= \frac{|f - f_0|}{f_0} = ( \quad ) \%$



D.凹面鏡：						單位：mm
(凹面鏡焦距 $f_0 = +75$ mm)						
物距 p	像距 q	量測焦距 f	放大率 $M=q/p$	物高 $H_0$	像高 H	放大率 $M=H/H_0$
300						
350						
400						
450						
500						
平均 f=						

※ 焦距測量百分誤差  $= \frac{|f - f_0|}{f_0} = ( \quad ) \%$ ;

E.凸面鏡：						單位：mm
(凸透鏡焦距 $F = +145$ mm)						
(待測凸面鏡焦距 $f_0 = -55$ mm) (X 座標 = $\quad$ mm)						
物距 p	像距 q	實際焦距 f	放大率 $M=q/p$	物高 $H_0$	像高 H	放大率 $M=H/H_0$
-300						
-350						
-400						
-450						
平均 f=						

※ 焦距測量百分誤差  $= \frac{|f - f_0|}{f_0} = ( \quad ) \%$ ; 曲率半徑： $\quad$  mm

## 六、討論：

1. 試導出凸透鏡的成像公式(1) ?
2. 一物體置於焦距為 150 mm 的凸透鏡前 20 cm 處，求成像位置與放大率？此時所成的像為實像或虛像？如將物體置於鏡前 8 cm 處則又如何？
3. 試比較記錄中二放大率的值，並算出其誤差？
4. 一物體置於焦距為 150 mm 的凹透鏡前 20 cm 處，求成像位置與放大率？此時所成的像為實像或虛像？如將物體置於鏡前 8 cm 處則又如何？