緒論、為什麼要學統計？

※將資料變成可應用的資訊（描述統計）

※對未知的情況進行估計（母體參數估計）

※辨明事實真相（假設檢定）

一、將資料變成可應用的資訊

表 1-1：台閩地區人口統計資料表

	出生		死亡		結婚		離婚	
	人數（人）	粗出生率（0/oo）	人數（人）	粗死亡率（0/oo）	對數（對）	結婚率（對/千人）	對數（對）	離婚率（對/千人）
86 年	326 002	15.07	121 000	5.59	166 216	7.68	38 986	1.80
87 年	271 450	12.43	123 180	5.64	145 976	6.69	43 603	2.00
88 年	283 661	12.89	126 113	5.73	173 209	7.87	49 003	2.23
89 年	305 312	13.76	125 958	5.68	181 642	8.19	52 670	2.37
90 年	260 354	11.65	127 647	5.71	170 515	7.63	56 538	2.53
91 年	247 530	11.02	128 636	5.73	172 655	7.69	61 213	2.73
92 年	227 070	10.06	130 801	5.80	171 483	7.60	64 866	2.87
93 年	216 419	9.56	135 092	5.97	131 453	5.80	62 796	2.77

資料來源：行政院主計處

二、對未知的情況進行估計

石門水庫管理局要拍賣水庫漁撈權，張正義先生認為石門風景優美，石門活魚北台灣相當有名，輔之桃園縣政府正積極推動觀光悠閒產業，如果能打出正宗石門活魚的保證，當能有相當獲利空間而有意競標石門水庫的漁撈權。

張先生面臨到的第一問題是，他要以多少的權利金來標得漁撈權？

以下是張先生的思考過程：

權利金＝漁獲價值－成本 － 預定利潤

漁獲價值＝大頭鰱成魚數量 × 市價

權利金＝大頭鰱成魚數量 × 市價 －成本 －預定利潤

顯然，張先生必須知道石門水庫到底有多少尾大頭鰱成魚之後，並參照市價、漁撈成本以及預定利潤之後，才能決定權利金的金額。大頭鰱的市價、漁撈成本以及預定利潤都是已知或查知的，但如何得知石門水庫大頭鰱成魚的數目呢？

表 1-2：石門水庫大頭鰱數目估計表

水域	有記號		無記號		合計
	數量	百分比	數量	百分比	
A	3	7.7%	36	92.3%	39
B	5	10.0%	45	90.0%	50
C	2	3.8%	51	96.2%	53
D	2	6.5%	29	93.5%	31
E	4	6.3%	60	93.8%	64
合計	16	6.8%	221	93.2%	237

16 / 200 ＝ 221 / 水庫既有大頭鰱成魚數量

水庫既有大頭鰱成魚數量 ＝221*200/16

＝2762.5

＝2763

三、辨明事實真相

黑暗星球的女性公務員抗議在升遷上存有性別歧視現象，因為升遷的公務員名單中，男性是女性的 5 倍多，女性公務員遭受到嚴重的打壓，因而要求同為女性的副總統出面主持公道。女副總統的幕僚在接受陳情後，向人事局調閱相關升遷資訊，其結果如表 1-3 所示，請問你若是幕僚會對女副總統做出何種建議？真有性別歧視之情形嗎？女副總該出面主持公道嗎？

表 1-3：黑暗星球公務員升遷分布表（觀察值）

	獲得升遷	沒有升遷	合計
男性	121	576	697
女性	23	102	125
合計	144	678	822

這樣的分布情況到底有沒有性別歧視？幕僚的思考過程如下：

如果升遷機會是公平的，哪麼女性公務員的升遷機會，應該等同於男性公務員的升遷機會，也就是等同於整體公務員的升遷機會

144/822=17.5%

根據既有男女公務員人數以及升遷與沒有升遷人數分布，來分別計算一個沒有性別歧視的升遷分布表，應為表 1-4。

表 1-4：黑暗星球公務員升遷分布表（期望值）

	獲得升遷	沒有升遷	合計
男性	122	575	697
女性	22	103	125
合計	144	678	822

男性且獲得升遷的期望值＝144/822＊697/822＊822＝122
女性且獲得升遷的期望值＝144/822＊125/822＊822=22
男性且未獲得升遷的期望值＝678/822＊697/822＊822=575
女性且未獲得升遷的期望值＝678/822＊125/822＊822=103

（期望值－觀察值）的殘差值越小，則代表升遷越公平；殘差值越大表示越不公平。為避免正負值相抵銷，故取殘差值的平方

卡方值（殘差值）＝Σ（期望值－觀察值）^{2}／ 期望值

＝1/122＋1/575＋1/22＋1/103＝0.065≒0.1

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.001(b)	1	.979		
Continuity Correction(a)	.000	1	1.000		
Likelihood Ratio	.001	1	.979		
Fisher's Exact Test				1.000	.533
Linear-by-Linear Association	.001	1	.979		
N of Valid Cases	822				

a Computed only for a 2x2 table

b 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 21.90.

據此，幕僚向女副總統報告，這次升遷並沒有性別歧視的現象存在，不應介入。

壹、量化研究（調查研究法）

一、形成假設：

假設是研究者對變項與變項之間關係的想像或猜測，因而假設的形成相當多元，如個人的生活經驗、直覺、天啟的，但最主要是來自既有的理論。

例如對影響選民投票參與行為的因素進行研究，如果一個人的公民責任感重，認為出席投票為公民應盡之義務，則他出席投票可能性高；相對公民責任感低的人，認為自己的一票無關選舉結果，則出席投票的可能性低。

其次，在歷次選舉過程，或多或少都見到候選人或其助選人員進行拜票活動，因此社會連帶關係深厚選民容易被人請託拜票，因而投票參與可能性較高；相對社會連帶關係薄弱選民，不容易因人情請託而出席投票，因而投票參與可能性較低。

據此，研究者可以提出選民投票參與行為的假設：選民的公民責任感、社會連帶會影響選民出席投票可能，其間公民責任感重，社會連帶關係深厚者，其投票出席率明顯高於公民責任感低，社會連帶關係薄弱者。

二、操作定義（問卷設計）：

選民公民責任感的測量，選民社會連帶的測量

1.社會上有人說：「選舉不差我這一票，去不去投票沒有關係」，請問您同不同意這樣的說法？

2.請問您結婚了沒有？請問您在本地居住了多久？

三、資料收集（抽樣設計）：

根據隨機抽樣對受訪者進行調查資料收集

四、假設檢定（統計分析）：

對調查所得資料進行統計分析，並對與研究假設對立的虛無假設（H_0）進行驗證。若 P 值≦0.05，虛無假設（H_0）落入拒斥區，暫時接受研究假設成立（可證為否性）。

	2. 有投票	3. 沒投票	4. 無反應	5. 回答人數
社會涉入度 高	▲93.8%	▼ 6.2%	0.0%	100.0%（178）
中	▲88.0%	▼11.3%	0.7%	100.0%（548）
低	▼81.2%	▲17.6%	1.3%	100.0%（547）
無反應	▼65.1%	▲34.9%	0.0%	100.0% （83）
公民責任感	▲91.4%	▼ 8.4%	0.1%	100.0%（841）

高	▼78.0%	▲20.1%	▲2.0%	100.0%（254）
中	▼66.2%	▲33.3%	0.5%	100.0%（195）
低	▼76.1%	17.9%	▲6.0%	100.0%（67）
無反應				

五、建立律則（研究發現）：

經檢視相當數量之事例後仍無法推翻虛無假設，則暫時接受研究假設為科學律則。經查驗相關國外研究文獻，發現公民責任感和社會連帶關係對美國選民、日本選民、南韓選民的投票參與行為都具有解釋力。

六、構成理論：

將一組相關聯的律則連結起來便構成理論。例如選民投票參與行為＝選民公民責任感與社會連帶關係的函數。據此，不僅能對既存的社會現象進行解釋，並且能夠預測未來的事實。例如，我們了解現代化社會高度的人口流動現象，將導致社會連帶關係越趨薄弱，而可以預期在其他條件相同的前提下，一個國家選民的投票率將因現代化的發展而趨下降。

貳、統計的基本概念

普遍調查 VS 抽樣調查

描述統計 VS 推論統計

類別資料 VS 連續資料

一、普遍調查與抽樣調查

普查是指對母體的所有成員進行調查，一網打進、一個不漏。

※母體：指研究調查對象的集合（投票行為調查研究的母體就是所有合格的選民）

因此，普查沒有抽樣問題，也就沒有抽樣誤差問題，其所得資料的統計值，就是母體的參數值。

抽樣調查是指『隨機』抽出母體中的部份成員，就被抽到者進行調查。

※樣本：母體的部份成員，用以代表母體。

因此，如果我們用抽樣調查所得資料的統計值，來推論或估計母體的參數值，就必須處理抽樣誤差問題。因而涉及信心水準、抽樣誤差、顯著度、區間估計等專有名詞。

二、描述統計與推論統計

1.描述統計

通常是指對母體所有成員（研究對象）的資料，進行次數分布或離散情況的統計分析。

例如政府的人口統計資料，包括性別統計、年齡統計、教育程度統計、婚姻統計等，企業的財務報表，營收統計、支出統計等，就是典型的描述統計，沒有信心水準和抽樣誤差問題。

台灣全國人口普查資料高達二千多萬筆，這些資料沒有經過統計整理是顯現不出任何意義，同時對政府施政也不具參考的價值。例如，政府擬定的生育政策必須參考生育年齡婦女的人數；敬老津貼政策則必須知道 65 歲以上的人口數。因此，描述統計是依據人口變項，例如性別、年齡、省籍、教育程度、職業、家庭收入、戶籍所在地，將普查所的資料整理成有意義及可以理解的資訊。

2.推論統計

是指利用隨機抽樣設計及方法，根據被抽出的母體部份成員（樣本）進行統計分析，再根據所獲得的樣本統計數值來推論未知的母體參數值。例如最常見選舉的支持度調查就是典型的推論統計。

以下是聯合報民調中心所做的民調選情報導：
聯合報針對 2005 年台北縣長選情進行民調發現，民進黨參選人羅文嘉聲勢急起直追，支持率上升為 <u>2 成 9</u>，國民黨參選人周錫瑋的支持率仍為 <u>3 成 1</u>，雙方差距在**<u>抽樣誤差範圍內</u>**，可說已打成平手。另<u>有 3 成 9 </u>選民還沒有決定支持對象。

聯合報今天（14 日）報導，根據聯合報六月初的調查，當時周錫瑋支持率 3 成 1，羅文嘉 2 成 5，周錫瑋領先 6 個百分點。 相隔 3 個月，最新調查顯示，周錫瑋的選情沒有起色，羅文嘉的支持率多了 4 個百分點。

聯合報分析羅、周兩人的票源，周錫瑋在男性選民仍保有領先優勢；女性選民中，兩人不相上下。 以年齡層區分，羅文嘉仍然比較獲得年輕選民的青睞，在 20 至 29 歲的選民中，支持率 4 成 2 大幅領先周錫瑋 13 個百分點；但周錫瑋對中年選民較有吸引力，在 40 歲至 59 歲選民中，支持率領先羅文嘉 10 個百分點以上。

就政黨傾向分析，民進黨選民的凝聚力比泛藍選民強，羅文嘉獲 7 成 3 民進黨支持者力挺；國、親支持者力挺周錫瑋的比率平均為 6 成 6。無政黨傾向選民中，2 成 2 支持羅文嘉，領先周的 1 成 3。

調查並發現，在可能影響北縣選情的因素中，北縣選民對羅文嘉施政能力的評價優於周錫瑋，比率各為 2 成 9 與 2 成 4；不過，對於誰比較了解台北縣民的需求，3 成 1 選民認為是周錫瑋，2 成認為是羅文嘉。

這次調查於 9 月 9 日至 12 日晚間進行，成功訪問了 989 位台北縣選民，另 313 人拒訪；在百分之 95 信心水準下，抽樣誤差在正負 3.1 個百分點內。

三、資料的性質

1.測量尺度

變項量尺	比較異同	比較大小	加減	乘除	實例	備註
名義變項（nominal）	○				性別、省籍、顏色、地區	定性資料 類別資料 離散資料
順序變項（ordinal）	○	○			學歷、滿意度	
等距變項（interval）	○	○	○		溫度、智商	定量資料 連續資料
等比變項（ration）	○	○	○	○	金額、身高、重量、速度	

※變項：指問卷中或表格中必須填寫的項目

※個案（元素）：指接受調查的對象，一個個案就代表一筆資料。1068 個樣本就代表有 1068 筆資料。

※變項值：一個變項至少要有二個以上的數值（受訪者回答的可能答案至少有兩個以上），變項值是指變項所包含的數值（受訪者所有可能回答的答案）。

2.時間與樣本屬性

	第一次調查（T1）	第二次調查（T2）	.（Tn）	資料屬性
固定樣本	固定樣本資料	固定樣本連續資料	….	時間序列資料、配對資料
獨立樣本	獨立樣本資料	獨立樣本連續資料	….	時間序列資料
資料屬性	橫斷面資料	橫斷面資料	橫斷面資料	

叁、描述統計

普查沒有抽樣問題，也就沒有推論統計的估計問題，普查所得統計量數便是母體參數值。用以表示資料中諸如，次數分配、百分比、集中量數（眾數、中位數、平均數）、離散量數（全距、四分位距、變異數、標準差）。

一、集中量數

1.平均數（Mean）：個案觀察值的加總 / 個案數（$\mu = \Sigma X / N$）

2.中位數（Median）：將數列資料依昇冪或降冪排列，而處於資料數列中間位置的值，便為中位數。

中位數的位置＝（個案數目＋1）/ 2＝（N＋1）/ 2

3.眾數（Mode）：出現次數最多的值

二、離散量數

1.全距：極大值－極小值

2.四分間距（Interquartile Range)：第 75 百分位數值 － 第 25 百分位數值

=Q3 位置的數值－Q1 位置的數值

百分位數＝（P/100）*n

Q1 位置＝（25/100）* n

Q3 位置＝（75/100）*n

※百分位若有小數，則採取無條件進 1 法，例如 10.2 則以第 11 位數為數值；若為整數，則取整數位與下一位數的平均值為數值，例如 10，則以第 10 位與第 11 位的平均值為數值。

3.母體變異數＝離均差平方和 / 個案數，（$\sigma^2 = \Sigma (X-\mu)^2 / N$。用來表示一組資料的離散程度

4.樣本標準差＝樣本變異數開根號。（$\sqrt{\Sigma (X-\mu)^2 / N-1}$）用來表示一組資料各觀察值與平均數之間的「單位距離」。

三、標準分數（Z 分數）

Z 分數 =（觀察值－平均數）/標準差，得到一個去除單位的標準分數，以進行各變項係數值的比較。

※　標準化的作用是在去除單位，將帶不同單位的統計數值，變成可以相互比較其影響力的程序（以標準差作為共同的單位）。

肆、機率

一、什麼是機率

機率（probability）是用來表示某一件事情發生的可能性高低。例如天氣報導，新竹地區今天下雨的機率是 0、10％、20％、50％、75％、90％、100％，來表示今天下雨的可能性。因此，機率的數值是介於 0→1 之間，機率為 0 表示，某一事件一定不會發生；機率為 1，則表示某一事件一定發生。相對地，機率為 0.5，則表示某一是發生與否的可能性各半。

二、名詞界定

樣本空間（sample space）：所有可能出現的實驗結果之集合

※各可能實驗結果出現的機率必須介於 0 和 1 之間，且所有可能出現實驗結果的機率的總和等於 1

事件＝樣本點的集合

事件機率＝該事件中個樣本點出現機率的總和。P（A）

條件機率＝給定已知條件下，某事件樣本點出現機率的總和。P（A｜B）＝

P（A∩B）/ P（B）

聯合機率＝兩事件同時出現的機率。P（A∩B）

獨立事件＝事件 A 發生的機率不受事件 B 的影響（A 與 B 之間沒有相關性存在），則事件 A 稱為獨立事件。P（A∩B）＝P（A）P（B）

互斥事件＝事件 A 與事件 B 之間沒有交集存在（若事件 A 發生，則事件 B 不會發生；反之亦然）。P（A∩B）＝0

員警升遷情況表

	男	女	合計
升遷	288	36	324
未升遷	672	204	876
合計	960	240	1200

	男（M）	女（W）	合計
升遷（A）	0.24＝P（A∩M）	0.03＝P（A∩W）	0.27＝P（A）

未升遷（A^C）	0.56＝P（A^C∩M）	0.17＝P（A^C∩W）	0.73=P（A^C）
合計	0.80＝P（M）	0.20＝P（W）	1.00

員警獲得升遷的機率=0.24＋0.03＝0.27＝＞事件機率

＝P（A）＝P（A∩M）＋P（A∩W）

男性警員中獲得升遷的機率＝0.24/0.80＝0.3＝＞條件機率

＝P（A｜M）＝P（A∩M）/ P（M）

女性警員中獲得升遷的機率＝0.03/0.20＝0.15＝＞條件機率

＝P（A｜W）＝P（A∩W）/ P（W）

一員警是男性警員且獲得升遷的機率＝0.24＝＞聯合機率

＝P（A∩M）

一員警女性警員且獲得升遷的機率＝0.03＝＞聯合機率

＝P（A∩W）

如果性別與升遷沒有相關關係存在＝＞獨立事件

則 P（A｜M）= P（A｜W），

且 P（A∩M）＝P（A）P（M）＝0.27 × 0.80＝0.22

且 P（A∩W）＝P（A）P（W）＝0.27 × 0.20＝0.05

如果性別與升遷具有互斥關係存在＝＞互斥事件

則 P（A∩M）＝0 或 P（A∩W）＝0

三、指派機率方式

1.古典法：每個實驗結果出現的機率都相同。

例如擲骰子，六個面每一個面出現的機率都為六分之一。

2.相對次數法：同樣的實驗結果出現之次數佔總次數的百分比。

例如 100 件同樣產品，其中無瑕疵的有 95 件，有瑕疵的有 5 件，客人買到瑕疵品的機率有 5%；買到無瑕疵的機率有 95%。

不論是古典法或是相對次數法，各實驗結果必須介於 0 與 1 之間，且所有實驗結

果出現機率的加總必須等於 1。

※.如何計算樂透頭彩的中獎機率？

42！/6！（42-6）！=42*41*40*39*38*37/6*5*4*3*2*1=5245786

三、集合概念

A 集合=｛1，2，3｝

B 集合=｛3，4，5｝

（A∪B）＝A+B-（A∩B）＝｛1，2，3，3，4，5｝－｛3｝＝｛1，2，3，4，5｝

（A∩B）＝A+B-（A∪B）＝｛1，2，3，3，4，5｝－｛1，2，3，4，5｝

＝｛3｝

P（A∪B）＝P（A）＋P（B）－P（A∩B）

P（A∩B）＝P（A）＋P（B）－P（A∪B）

P（A｜B）＝P（A∩B）/ P（B）

四、離散變數的機率分布、期望值及變異數

1.離散變數與連續變數的區分：

離散變數：凡變項的測量尺度是屬於名義尺度者即為離散變數，而等比測量尺度之數值屬於自然數者也為離散變數。

連續變數：凡變項的測量尺度屬於順序、等距測量尺度者即為連續變數，而等比測量尺度者之變項值為非自然數者，也為連續變數。

2.離散變數的機率分布

離散變數的機率分布即為相對次數的機率分布。

f(x)= x 之次數 / 總次數

3.期望值之計算

期望值即為個別 X 值與其對應機率相乘積的加總

E（x）＝ Σx f(x)＝ μ ＝平均數

4.變異數之計算

$\sigma^2 = \Sigma（x - \mu）^2 f(x)$

每天銷售汽車數（X 值）	天數	總天數	f(x)=機率	期望值	期望值	離均差	離均差平方	離均差平方*
0	54	300	0.18	0	1.5	-1.5	2.25	
1	117	300	0.39	0.39	1.5	-0.5	0.25	
2	72	300	0.24	0.48	1.5	0.5	0.25	
3	42	300	0.14	0.42	1.5	1.5	2.25	
4	12	300	0.04	0.16	1.5	2.5	6.25	
5	3	300	0.01	0.05	1.5	3.5	12.25	
加總值	300		1	1.5				

5.二元變項（**binominal variable**）之機率分布

二元變項變項：是指變項 **X** 之變項值只有兩種（男與女、成功與失敗、正面與反面），且測量尺度屬於名義尺度。因此，二元變項變項是指變項值只有兩種的名義變項。

二次（元）變項實驗機率分佈的基本條件：

（**1**）**.**該實驗進行 **N** 次相同的試驗（例如一個銅板連拋 **5** 次）。

（**2**）**.**每一次試驗都只有兩種結果（每次拋的結果都只有正面或反面兩種）。

（**3**）**.**成功的機率為 P；失敗的機率為（1-P），且每次試驗的成功和失敗的機率都維持不變（每次出現正面的機率都為 0.5）。

（**4**）**.**每一次試驗都是獨立的（前一次試驗的結果不會影響到下一次試驗的結果）。

馬丁服飾店 **3** 名顧客成交機率分佈表（**n=3**，**p=0.3**）

第一位顧客	第二位顧客	第三位顧客	實驗結果	機率
買	買	買	**SSS=3** 人買	**0.3*0.3*.0.3=0.027**
買	買	不買	**SSF=2** 人買	**0.3*0.3.*0.7=0.063**
買	不買	買	**SFS=2** 人買	**0.3*0.7*.03=0.063**
買	不買	不買	**SFF=1** 人買	**0.3*0.7*0.7=0.147**
不買	買	買	**FSS=2** 人買	**0.7*0.3*0.3=0.063**
不買	買	不買	**FSF=1** 人買	**0.7*0.3*0.7=0.147**
不買	不買	買	**FFS=1** 人買	**0.7*0.7*.03=0.147**
不買	不買	不買	**FFF=0** 人買	**0.7*.07*0.7=0.343**

↓

x 值	f(x)＝機率分布	期望值【平均數】	變異數
0 人買	**0.343*1＝0.343**	**0*0.343=0.000**	**（0-0.9）^{2} * 0.343**
1 人買	**0.147*3＝0.441**	**1*0.441=0.441**	**（1-0.9）^{2} *0.441**
2 人買	**0.063*3＝0.189**	**2*0.189=0.378**	**（2-0.9）^{2} *0.189**
3 人買	**0.027*1＝0.027**	**3*0.027=0.081**	**（3-0.9）^{2} *0.027**
加總（Σ）	Σ=1	Σ=**0.9**=n×p	Σ=**0.63**=n×p×（1-p）

↓

f(0)=**0.343*1=0.7*.07*0.7*1＝0.343**

f(1)= **0.147*3=0.7*0.7*.03*3＝0.441**

f(2)= **0.063*3=0.3*0.7*.03*3＝0.189**

f(3)= **0.027*1=0.3*0.3*.0.3*1＝0.027**

↓

$$f(x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

6.卜瓦松機率分布（Poisson probability distribution）

卜瓦松機率分布是用來估算在特定時間內或特定空間區域內，特定事件的發生機率。最常用在估計特定時間內之來客數的分布機率，以及特定時間內交通流量的分布機率。

卜瓦松實驗機率分布的基本條件：

（1）任意兩相同長度（時間長度或空間長度）區間內發生特定事件的機率相同。

（2）特定事件的發生是獨立的（前一事件的發生並不影響後一事件的發生）。

卜瓦松機率函數公式：

$$f(x)=\frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!}$$

$f(\chi)$＝一區間中發生 χ 次特定事件的機率

μ＝一區間中發生特定事件次數的期望值或平均數

e＝2.71828

例子：桃園市介壽路麥當勞的得來速車道，每 15 分鐘平均來 10 部車子，在任何相同的時間區段車輛的到達機率皆相同，且車輛的到達與否為獨立事件。請問：

在 15 分鐘之內有 5 部車子來的機率為何？
3 分鐘內只有一部車子來的機率為何？

每 15 分鐘平均來 <u>10</u> 部車子

$$f(x)=\frac{10^{x}e^{-10}}{x!} \qquad f(5)=\frac{10^{5}e^{-10}}{5!}=0.0378$$

每 15 分鐘平均來 10 部車子，每 3 分鐘平均來 <u>2</u> 部車子

$$f(X)=\frac{2^{X}e^{-2}}{X!} \qquad f(1)=\frac{2^{1}e^{-2}}{1!}=0.2707$$

例子：高公局對中山高瀝青舖面耐用度進行檢視，統計發現在重舖路面的一個月後，平均每一公里路面出現 2 個瑕疵點。請問 3 公里內沒有出現瑕疵點的機率為何？
3*2=6（3 公里平均出現的瑕疵點數，μ=6）
3 公里沒有出現瑕疵點（X=0）
查表（μ=6，X=0），卜瓦松機率為 0.0025

例子：中華大學電話註冊期間每分鐘平均有 2 通電話打入，請問：
a.每小時平均打入通數為何？
b.5 分鐘打入 3 通的機率為何？
c.5 分鐘沒有電話打入的機率為何？

a.60*2=120
b.5 分鐘平均有 10 通（μ=10），打入 3 通（X=3），查表機率=0.0076
c. 5 分鐘平均有 10 通（μ=10），打入 0 通（X=0），查表機率=0.0000

五、連續變數之機率分布

連續變數是指其測量尺度為等距或等比之變項。相對於離散變數之機率分布是以相對次數機率分配法，連續變數之機率分布是以相對面積比率法來計算（稱為機率密度函數（probability density function ））。而連續變數之機率分布形態有：均勻機率分布型態、常態機率分布型態，以及指數機率分布型態三種。

1.均勻機率分布型態（機率密度函數相同）

例子：汎美航空三年來統計，由芝加哥飛紐約的 012 班機所使用的飛行時

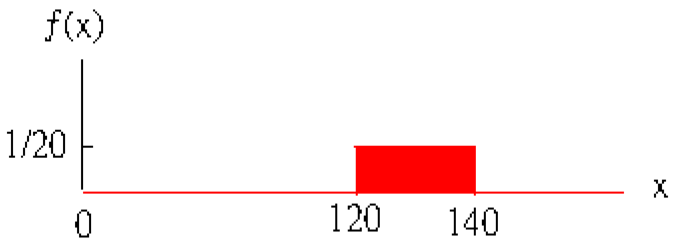
間，發現使用的飛行時間（χ 值）是介於 120 分鐘至 140 分鐘之間，且該時段中（120-140）每一個時間點（χ 值）出現的機率都相等（機率密度函數相同）。這便是均勻機率分布（uniform probability distribution）。請問：

a.012 班機到達紐約的飛行時間在 125 分至 130 分之間的機率為何？

b.在 124 分至 132 分之間到達的機率為何？

c.012 班機平均飛行時間為何？

d.012 班機飛行時間的標準差為何？



$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqq x \leqq b \\ 0 & x < a \text{ or } x > b \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{140-120} & 120 \leqq x \leqq 140 \\ 0 & x < 120 \text{ or } x > 140 \end{cases}$$

$E(x) = (a+b)/2$

$Var(x) = (b-a)^2/12$

2.常態機率分布（機率密度函數分布不同）

常態機率分布是統計應用最廣的機率分布，因為自然界和人類社會許多變項的變項值分布都成常態分布。因而，樣本平均數成常態分布的中央極限定理，成為推論統計最重要的基礎，不論是母體平均數的估計或研究假設的檢定，都是根據常態機率分布。

常態機率分布的特性：

a. 常態分布是以平均數為中心，形成左右對稱的鐘型曲線分布，又稱高斯分布（Gauss distribution）。其平均數、中位數及眾數三者，皆位於常態分布曲線的中心位置。若將常態分布曲線標準化，則形成平均數為 0（$E_{(x)}=0$），標準差為 1（$\sigma=1$）的**<u>標準常態分布曲線</u>**。

b.不同的標準差（σ）會形成不同的常態分布曲線，σ 越小，峰度越高，寬度越窄；σ 越大，峰度越低，寬度越大。

c.常態分布曲線的兩端無限延長，理論上並不會接觸到水平軸線。

d.常態曲線與水平軸形成的總面積為 1（與均勻機率分布的總面積也同樣為 1），由於常態曲線是對稱分布，因而平均數左右兩邊的面積均為 0.5。

e. 在平均數加減左右各一個標準差的區間，包含 68.3%的面積。換言之，一個常態隨機變數值落在平均數加減左右一個標準差的區間的機率有 0.683。

在平均數加減左右兩個標準差的區間，包含 95.4%的面積。換言之，一個常態隨機變數值落在平均數加減左右二個標準差的區間的機率有 0.954。

在平均數加減左右三個標準差的區間，包含 99.7%的面積。換言之，一個常態隨機變數值落在平均數加減左右三個標準差的區間的機率有 0.997。

常態機率密度函數：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(\chi-\mu)^2/2\sigma^2}$$

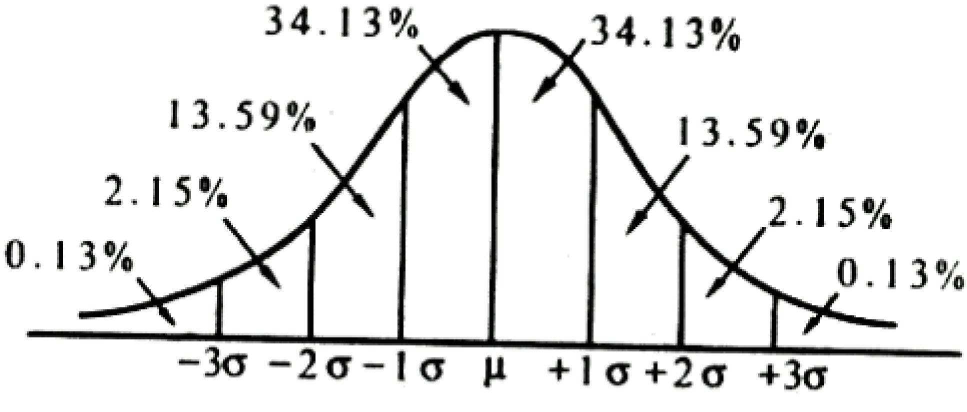


图 8-2　用 S—B 量表测得的一个标准组儿童的 IQ 分布情况

例子：BS 輪胎公司研發部門完成一種新輻射鋼絲輪胎，在靜肅性、抓地力、舒適性均優於市面競爭對手，但由於成本價格較高，因而行銷部門人認為該款產品的耐用度將決定其市場的銷售表現，因而提出行駛里程數的保固行銷策略，因而要求研發部門提出該款輪胎使用里程數的分析報告。研發部門實驗之後的統計資料顯示，輪胎平均使用里程數為 36500 英里，而標準差為 5000 英里，並且成常態分布。

請問：

1.輪胎能跑超過 40000 英里的機率為何？

（40000-36500）/5000=0.7 ＝＞Z 值

0~0.7Z 的面積為 0.2580

0.5－0.2580=0.2420

2. 行銷部門分析認為必須使獲得優惠者不超過總數的 10%（有 90%輪胎都達到的保固里程數），BS 公司才有利可圖，請問保證里程數為何？

（X-36500）/5000= -1.28

X-36500= -1.28*5000

X=36500 －（1.28*5000）

=36500 － 6400

=30100 英里（48441 公里）

3.指數機率分布

連續變數的指數機率分布函數是離散變數的卜瓦松機率分布的變形，前者常被用來描述完成一項工作所需時間，或連續兩個事件間隔時間的連續機率分布，而後者則被常用來描述特定時間的出現事件次數的離散機率分布。

例如洗車場平均一小時有 10 部車子進來，這是卜瓦松機率分布；相對地，連續兩部車進來的平均時間間隔則為 0.1 小時（6 分鐘），則為指數機率分布。

指數機率密度函數

$$f(x)=\frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}$$

$$X \geqq 0，\mu > 0$$

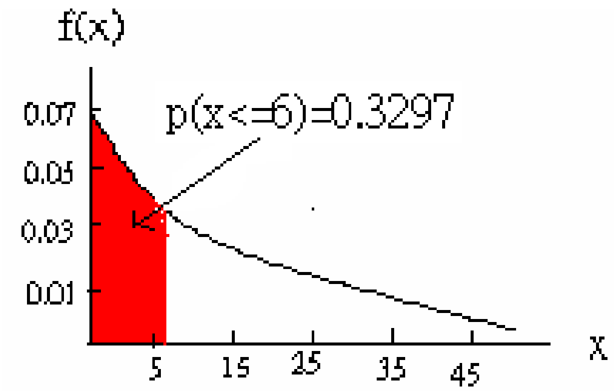
卜瓦松機率函數

$$f(x) = \frac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!}$$

例子：高雄港散裝貨輪碼頭卸貨時，裝載滿一卡車所需時間呈指數機率分布，且平均裝載一卡車的時間為 15 分鐘，其機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{15} e^{-x/15}$$

指數機率密度函數分布圖



累積機率的計算公式：

$$P（x \leqq x_0）=1-e^{-x_0/\mu}$$

因此，裝貨時間少於 6 分鐘的機率為

$$P（x \leqq 6）=1-e^{-6/15} = 0.3297$$

裝貨時間少於 18 分鐘的機率為

$$P（x \leqq 18）=1-e^{-18/15} = 0.6988$$

裝貨時間介於 6 分鐘到 18 分鐘的機率為

$$P（6 \leqq x \leqq 18）=（1-e^{-18/15}）-（1-e^{-6/15}）= 0.6988 - 0.3297 = 0.3691$$

六、推論統計：常態分布、中央極限定理與區間估計

一、常態分布（normal distribution）：

常態分布是以平均數為中心，形成左右對稱的鐘型曲線分布，又稱高斯分布（Gauss distribution）。其平均數、中位數及眾數三者，皆位於常態分布曲線的中心位置。若將常態分布曲線標準化，則形成平均數為 0，標準差為 1 的標準常態分布曲線。

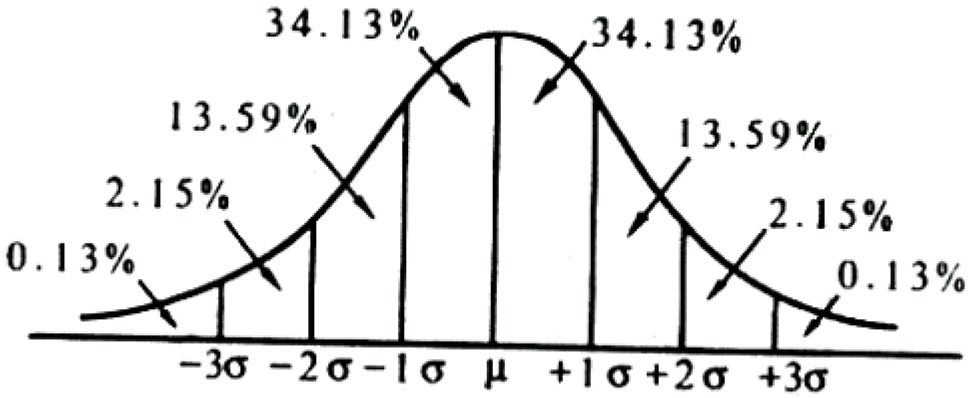


图 8-2　用 S—B 量表测得的一个标准组儿童的 IQ 分布情况

二、中央極限定理：

在大數法則底下，隨機抽樣（n≧30）的樣本平均數的抽樣分佈將成常態分佈，樣本平均數的平均數等於母體的平均數（ μ ），樣本平均數的標準差等於『母體的標準差 ÷ 樣本數開根號』（ $\sigma/\sqrt{n}$ ），稱為「標準誤」。

$$\overline{X}1+\overline{X}2+\overline{X}3+.....+\overline{X}n \;/\; n = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

μ＝母體平均數

σ＝母體標準差

n＝樣本數

$\sigma_{\bar{x}}$ ＝ 樣本平均數分布的標準差

三、區間估計

在常態分布的情形下，樣本平均數的平均數加減左右一個標準差的區間（$\mu \pm \sigma / \sqrt{n}$），包含 68.3%的樣本平均數。換言之，一個抽樣產生的樣本平均數，其加減左右一個標準差的區間，包含有母體平均數的機會有 68.3%。

在樣本平均數的平均數加減左右兩個標準差的區間（$\mu \pm 2\sigma / \sqrt{n}$），包含 95.4%的樣本平均數。換言之，一個抽樣產生的樣本平均數，其加減左右二個標準差的區間，包含母體平均數的機會有 95.4%。

在樣本平均數的平均數加減左右三個標準差的區間（$\mu \pm 3\sigma / \sqrt{n}$），包含 99.7%的樣本平均數。換言之，一個抽樣產生樣本平均數加減左右三個標準差的區間，包含母體平均數的機會有 99.7%。

因此，當用以估計母體平均數的區間越大，母體平均數落在這個區間內的機率也就越大。不過，估計的區間越大，應用的價值也就越小。

※擴大樣本數可以縮小標準差：在同樣的信賴係數（信心水準），也就能以較窄的區間對母體平均數進行估計。

七、中央極限定理的審視與應用

例子：以 EAI 公司 2500 位主管作為母體，並已知 2500 位主管平均年薪為美金 51,800 元，標準差為美金 4,000 元，有 1600 位主管完成訓練課程，比例為 0.6。任何關於母體的數值都稱為「母體參數」（parameter）。EAI 的三個母體參數值分別如下：

母體平均年薪＝μ=51,800

母體年薪標準差＝σ=4,000

母體完成訓練課程比例＝P=0.6

假定我們不知這三項的母體參數值（母體的參數值只有上帝才知道），而必須用抽樣調查的方式來推估這三項母體參數值。我們根據隨機抽樣原理從 2500 人隨機抽出 30 人，這 30 個樣本的平均年薪為 51814 元，標準差為 3347.22 元，

完成訓練課程比例為 0.63，前述三個數值稱為「樣本的統計值」。直接用這三個樣本統計值來推估母體參數值的方式，我們稱之為「點估計」（point estimator）。

以點估計方式直接來估計母體參數值，其恰好命中的機率趨近於零（比中樂透彩頭獎還要困難）。因此之故，抽樣調查對母體參數值的估計，必須使用區間估計的方式，也就是『樣本統計值』±『抽樣誤差值』，來估計參體參數值落入該區間的機率。

	母體參數值	樣本統計值	抽樣誤差值
平均年薪	51800	51814	∣51800-51814∣=14
年薪標準差	4000	3347.22	∣4000-3347.22∣=652.78
完成受訓比例	0.6	0.63	∣0.6-0.63∣=0.03

根據中央極限定理，EAI 公司每次抽取 30 樣本，在抽取 n 次之後，就會有 n 個平均年薪所形成的抽樣機率分布，這樣抽樣機率分布是呈現常態機率分布，且這 n 個樣本平均年薪的值望值（所有樣本平均年薪的平均年薪）＝母體的平均年薪＝51800，樣本平均年薪的標準差＝母體年薪標準差 / $\sqrt{n}$＝4000 / $\sqrt{30}$＝730.3。請問：

1.在常態機率分布下，一個樣本平均年薪落在 51800±730.3（51069.7~52530.3）區間的機率為何？

2. 在常態機率分布下，一個樣本平均年薪落在 51800±500（51300~52300）區間的機率為何？

3. 在常態機率分布下，一個樣本平均年薪落在 51800±2*730.3（50339.4~53260.6）區間的機率為何？

4.如果把樣本數由原先的 30 人增加為 100 人，在常態機率分布下，一個樣本平均年薪落在 51800±500（51300~52300）區間的機率為何？

在推論統計常需要以樣本的比例統計值來推論母體的比例參數值，例如施政滿意度調查、顧客滿意度調查、市場佔有率調查、選舉支持度調查等。樣本比例值的機率分佈，也同樣獲得中央極限定理的保護。

（$P_1+P_3+\ldots\ldots+P_{n-1}+P_n$）/ n＝P（**樣本平均比例值＝母體比例值**）

P_1、P_3、…….、P_{n-1}、P_n 的標準差＝$\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}$＝母體標準差/$\sqrt{n}$（見 P.270）

在 EAI 例子中，請問：

1.樣本比例統計值落在母體比例參數值 ±0.05 的機率為何？

2.樣本比例統計值落在母體比例參數值 ±0.179 的機率為何？

3.樣本比例統計值落在母體比例參數值 ±0.268 的機率為何？

4.若樣本數由原先 30 增至 100 人，則樣本比例統計值落在母體比例參數值 ±0.05 的機率為何？

※母體標準差是參數值，是不可知的。即使中央極限定理保證，樣本平均數的標準差＝母體標準差 ÷ √n，但問題是現實世界的抽樣只抽一次，我們只有一個樣本平均數，並沒有 n 個樣本平均數。因此，在推論統計上，我們是用樣本的標準差（s）來代替母體的標準差。

樣本平均數的標準差＝s / √n

樣本比例值的標準差＝√p(1-p)/√n

抽樣誤差（在 95%的信心水準下）：±2*σ/√n

=±2*√p(1-p)/√n

＝±2*0.5/√n

=±1/√n

＝樣本數開根號的倒數。

陸、推論統計的基本概念

中央極限定理是推論統計的基礎，在隨機抽樣的前提下，樣本平均數會成常態分布，其間樣本平均數的平均數會等於母體的平均數，且有 68.3%的樣本平均數會落在母體平均數的左右一個標準差範圍內，有 95.4%的樣本平均數會落在母體平均數的左右兩個標準差之內，有 99.7%的樣本平均數會落在母體平均數的左右三個標準差之內。因此，當我們以 95%作為信心水準，一個樣本平均數之 Z 分數大於+2 的機會只有 2.5%，小於-2 的機會也只有 2.5%，一旦這個樣本平均數之 Z 分數確實是大於+2 或小於-2，則表示該樣本平均數並非隨機出現，而具有統計上的顯著差異性。

一、以隨機樣本統計量數來推論母體的參數，其結果可能是「見微知著」，或者「以偏蓋全」，而樣本的代表性是關鍵的所在。其間事前的抽樣設計與事後的加權處理，是強化或確保樣本代表性的重要措施。

二、為什麼要抽樣?

1. 節省經費
2. 節省時間

3. 提高資料的正確性

4. 取得較詳盡的資料

5. 減少損失

三、抽樣的風險：若無法確保樣本的代表性，以樣本來推論母體，等於「以偏蓋全」，而讓數字說錯話。例如 1936 年文學文摘（Literary Digest）與美國總統選舉預測事件，因為文摘讀者群明顯偏向屬於高收入共和黨選民，樣本代表性遭嚴重扭曲，而做出共和黨總統候選人藍登獲勝的錯誤預測。在此同時，蓋洛普則根據隨機抽樣設計（都有選民都有被抽中的同等機會，或所有選民都有一個不為零的被抽中機會），正確預測出民主黨的羅斯福將會連任成功。這說明了樣本之代表性對母體推論的重要性。抽樣設計就是在隨機的前提下確保樣本的代表性。

四、機率抽樣與非機率抽樣

■機率抽樣：在完整定義的母體中（有 N 個成員），每一個個體（n）都有一個不為零的中選機會。例如單純隨機抽樣、系統抽樣、分層隨機抽樣、分層多階段等機率抽樣等抽樣方式，皆為機率抽樣方式。

單純隨機抽樣（simple random Sampling）：任何樣本數為 n 的樣本組合中選的機率都是相等的。做法是把全體成員從 1 到 N 編號，然後依亂數表抽取 n 個號碼。

等距抽樣（systematic sampling）：先把母體總數 N 除以樣本數 n，得到商數 K（也就是每間隔 K 人抽取一人的方式做法），再用亂數表自 1 到 K 選擇一個亂數 R，則 R，R+K，R+2K，…，R＋（n-1）K 等號碼中選。

分層隨機抽樣（stratified random sampling）：先把母群體的所有個體依某些特徵進行分組，也就是分層，然後在各層進行獨立的隨機抽樣。

等比例多階段抽樣（probability proportional to size sampling）：例如全國家庭收支調查，第一階段是抽鄉鎮市，先根據各鄉鎮市人口數多寡進行排列，第二階段抽村里，在中選的鄉鎮市根據村里人口數的多寡進行排列，第三階段在中選的村里再抽戶，第四階段在中選的戶中再抽人。而在抽樣過程中每一階段各單位的中選機率與其單位的大小成比例，單位越大中選機率越高，最後結算下來母群體中每一個體都有相等被抽中的機會。

集群抽樣（cluster sampling）：先把母體群分割成小集群，把這些小集群編上號碼，然後隨機抽取這些號碼，凡是被抽中的集群，則整個集群成員

全部調查。這個方法的冒險性非常大，主要功能是節省時間、人力、經費，是很不得以的做法，非萬不得以不要採用。即使要用，也要守著「集群內部異質性越大越好」的原則。

■非機率抽樣：凡不屬於這個定義範圍的，都是非機率抽樣。例如偶遇抽樣、立意選樣、配額選樣、便利抽樣、自願樣本、雪球抽樣等。

※　推論統計是建立在機率抽樣的基礎上。非機率抽樣由於沒有機率作母體推論的基礎，因而大多只能作描述性的用途，不能對母體參數進行估計或理論假設的檢定。

柒、區間估計

一、母體平均數的區間估計的實例（大樣本，n≧30）－CJW 的顧客服務滿意度調查

CJW 是美國一家有名的運動用品通路商，提供顧客方便的網路下單及宅配服務。友善的下單系統、正確地處理訂單，以及準時的配送服務和瑕疵品處理，都會密切影響顧客對該公司的服務滿意度，同時也影響顧客下一次還會不會上門訂購。因此，CJW 行銷部門每月都會從上個月訂貨的客戶中，隨機抽樣 100 名進行顧客滿意度調查。

CJW 公司詢問樣本客戶，「如果 0 分代表非常不滿意，100 分代表非常滿意，請問您對本公司的服務會給幾分？」。過去調查發現，每個月滿意分數的標準相當穩定趨近於 20 分，因而假定母體的標準差為 20。這個月調查的滿意平均分數為 82 分，如果要以 95 的信心水準進行母體平均數的區間估計，請問這個區間為何？

解題的步驟：

1.先算出樣本平均數的標準差(稱為標準誤)＝＞$\sigma/\sqrt{n}=20/\sqrt{100}=20/10=2$

2.95%的信心水準等於平均數±1.96 個標準誤＝＞1.96x2=3.92

3.82±3.92＝＞母體平均數有 95%的機率落在 78.08（下界）至 85.92 分（上界）之間。

如果母體的標準差是未知的，則必須以樣本的標準差（s）來估計母體的標準差（σ），以 s 代替 σ。美國金管會想了解初步國內卡債問題，在 48 萬的卡奴中隨機抽出 85 人，如表 8.2 所列負債金額。請問以 95%信心水準來估計 48 萬卡奴平均負債金額的區間。

解題的步驟：

1.先算出樣本的平均數及標準差（s）

2.以 s 代替 σ ＝＞ $\sigma/\sqrt{n}$＝$s/\sqrt{n}$

3.95％的信心水準等於樣本的平均數±1.96 $s/\sqrt{n}$

二、自由度（df＝degrees of freedom）與 t 分布

我們知道在樣本數 n≧30 的前提下，不論母體原先呈現任何分布，其樣本平均數的機率分布是呈常態分布，且樣本平均數的期望值＝母體的平均數；而樣本平均數的標準差＝母體的標準差/$\sqrt{n}$，這就是中央極限定理的內容。但是，已知樣本數 n＜30，母體呈現常態分布，但不知母體標準差的條件下，如何對母體平均數進行區間估計？

這時候必須以 t 分布來取代 z 分布。我們了解，當樣本數 n≧30，不管 n 為多少，以平均數為中心加減左右各一個標準差，可以涵蓋 68.3％的樣本平均數分布；加減左右各兩個標準差，可以涵蓋 95.4％的樣本平均數分布，不受樣本數不同的影響。但是，t 分布的機率會受樣本數不同（df＝n-1）的影響，也就是會受自由度的影響。當自由度越大時，t 分布就會越趨近 z 分布（見圖 8.5）。

因此，當樣本數 n＜100，已知母體呈常態分布，但不知母體的標準差時，對母體平均數的信賴區間估計，必須採 t 分布。

母體平均數的信賴區間估計＝樣本平均數 ± $t_{\alpha/2}\ s/\sqrt{n}$

母體平均數信賴區間估計之 Z 分布與 T 分布的適用條件表

樣本數 n	母體分布型態	母體標準差狀態	母體平均數的區間估計
n≧30	不拘	已知	樣本平均數 ± $Z_{\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}$
n≧100	不拘	未知	樣本平均數 ± $Z_{\alpha/2}\ s/\sqrt{n}$
n＜30	常態分布	已知	樣本平均數 ± $Z_{\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}$
n＜30	常態分布	未知	樣本平均數 ± $t_{\alpha/2}\ s/\sqrt{n}$

瑞輝藥廠研發減肥藥品「要你瘦」進入人體實驗階段，藥廠隨機抽 10 個樣本進行實驗，一個月後 10 個樣本的減肥成果分別如下表。如果該公司想在廣告上強調每月可減肥幾公斤，並且避免廣告不實的指控或罰款，公司該如何擬定廣告內容？

編號	體重減少公斤數
1	2

2	3
3	5
4	5
5	4
6	7
7	3
8	2
9	4
10	5

捌、假設檢定

抽樣的推論統計包括「母體參數估計」與「研究假設檢定」兩部分。

母體的參數估計：例如我們想知道公民對中央政府的施政滿意度如何？當然一一訪問將近一千六百五十萬的國內公民，問他們對中央政府的施政滿不滿意，統計之後將可以獲得答案（例如有 35%對中央政府施政表示滿意，這 35%施政滿意度就是母體參數值）。不過，這顯然不符合成本效益，透過隨機抽樣的方式，隨機抽出 1068 位公民，問他們對中央政府施政滿不滿意，受訪樣本中有 37%的受訪公民表示滿意，48%表示不滿意。在 95%信心水準下，抽樣誤差為正負 3.0%，抽樣調查顯示全體公民對中央政府施政表示滿意的母體參數，有 95%的機會是落在 34%至 40%的區域之間；對中央政府施政不滿意的母體參數，有 95%的機會是落在 45%至 51%的區域之間。

一、研究假設與虛無假設

研究假設（hypothesis）：研究者所欲證明的事務，A＞B

虛無假設（null hypothesis）：虛無假設是與研究假設相對立的假設，A≦B

假設檢定：統計檢定是在檢定虛無假設。以虛無假設作為前提，並根據信心水準建立信賴區間，若統計值落入信賴區間則接受虛無假設；若統計值沒有落入信賴區間，則拒絕虛無假設，暫時接受研究假設

■小樣本平均數檢定（T 檢定）

例如消基會接獲消費者檢舉，某家汽水廠商的標示不實，容量標示為 1000C.C.，但實際容量常常不足，有欺騙消費者之嫌。於是消基會便展開調查，在市面上隨機購買該汽水廠商的產品 10 瓶作為樣本，並得知在汽水充填的過程中，確實會有誤差發生並且呈常態分佈。這十瓶樣本的實際容量分別如下：

985	989

928	965
950	1005
1010	968
945	1015

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
汽水重量公克	10	976.00	29.62	9.37

One-Sample Test

	Test Value = 1000					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
汽水重量公克	-2.563	9	.031	-24.00	-45.19	-2.81

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

研究假設 Ha：μ＜1000C.C.

虛無假設 Ho：μ≧1000C.C.

1.976-1000 = -24

2. 29.62 / $\sqrt{10}$ = 9.37

3.T = -24 / 9.37 = -2.563

4.**99%的信心水準下，α=0.01，在自由度 9（n-1=9）虛無假設拒斥區的臨界 T 值為 -2.821**。因而，凡樣本平均容量的 T 值 ＜ -2.821，即落入虛無假設拒斥區

5.樣本平均重容的 T 值＝-2.563（-2.563＞-2.821），沒有落入虛無假設的拒斥區

6.接受虛無假設（Ho）：μ≧1000C.C.（容量沒有不足）

結論：該廠牌的汽水容量沒有不足

4.**<u>95%的信心水準下，α=0.05，在自由度 9（n-1=9）虛無假設拒斥區的臨界 T 值為 -1.833</u>**。因而，凡樣本平均重量的 T 值 ＜ -1.833，即落入虛無假設的拒斥區

5.樣本平均容量的 T 值＝-2.563（-2.563＜-1.833），落入虛無假設的拒斥區

6.拒絕虛無假設（Ho）：μ≧1000C.C.（容量沒有不足）

7.接受研究假設（Ha）：μ＜1000C.C.（容量不足）

<u>結論：該廠牌的汽水容量不足</u>

■大樣本平均數檢定（Z 檢定）

Hilltop 公司出品的 3 磅裝咖啡被檢舉重量不足，公平交易委員會接獲檢舉後，隨機抽樣 36 罐，並去函 Hilltop 公司要求說明，填充過程每罐咖啡重量的標準差，得知為 0.18 磅。經測量 36 罐樣本的平均重量為 2.92 磅。如過公平交易委員會需要有 99%的信心水準對廠商開罰，請問 Hilltop 公司會不會被罰？

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

研究假設（Ha）：μ＜3（重量不足）

虛無假設（Ho）：μ≧3（重量沒有不足）

1. 2.92-3.0 = -0.08

2. 0.18 / $\sqrt{36}$ = 0.18 / 6 = 0.03

3. Z = -0.08 / 0.03 = -2.6667

4. 99%的信心水準下，虛無假設拒斥區的臨界 Z 值為 -2.33。因而，凡樣本平均重量的 Z 值＜-2.33，即落入虛無假設的拒斥區

5.樣本平均重量的 Z 值＝-2.667（-2.667＜-2.33），而落入虛無假設的拒斥區

6.拒絕虛無假設（Ho）：μ≧3（重量沒有不足）

7. 接受研究假設（Ha）：μ＜3（重量不足）

<u>結論：Hilltop 公司 3 磅裝咖啡的重量不足</u>

二、第一類型錯誤與第二類型錯誤

虛無假設的接受或拒斥是根據統計值是否落入機率分佈與信心水準所形成的信賴區間，統計值落入信賴區間則接受虛無假設（研究假設不被接受）；統計值落入信賴區間之外，則拒絕虛無假設（研究假設被接受）。因而，虛無假設被接受或拒絕是機率的問題(介於 0 與 1 之間)，而不是全有或全無的問題(1 與 0)。因此，我們是在 95%信心水準下拒斥了虛無假設接受了研究假設，但我們所接受的研究假設仍有 5%的機率可能是錯的（犯第一類型錯誤的機率有 0.05）。

假設檢定發生錯誤的類型有兩種：

第一類型錯誤（錯殺好人）：Ho 為真，但拒斥了 Ho。

第二類型錯誤（認賊作父）：Ho 為假，但接受了 Ho 。

在假設檢定上所允許犯型一錯誤的最大機率，稱為顯著水準（level of significance），也稱之為 α 值（ α 通常定為 0.05 或 0.01），而（1- α ）值則稱為信心水準（信心水準通常定為 95%或 99%）。

三、單尾檢定與雙尾檢定

單尾檢定：研究者所欲證明事務為 A＞B 或 A＜B，A≧B 或 A≦B，則屬於單尾檢定，虛無假設的拒斥區只在左尾端或右端尾的一尾，因而稱之為單尾檢定。

雙尾檢定：研究者所欲證明事務為 A＝B 或 A≠B，則屬於雙尾檢定，虛無假設的拒斥區左尾端和右端尾的兩端，因而稱之為雙尾檢定。

雙尾檢定的拒斥區比較小，而比較難拒斥虛無假設

例如在 Z 檢定中， α 為 0.05，單尾檢定的右尾拒斥區的臨界 Z 值為 1.65；左尾拒斥區的臨界 Z 值為 -1.65。如果是雙尾檢定，右尾拒斥區的臨界 Z 值為 1.96；左尾拒斥區的臨界 Z 值為 -1.96。雙尾檢定比較難拒斥虛無假設，研究假設因而比較難成立。

■大樣本的 z 值雙尾檢定

例子：美國高爾夫球協會為因應科技的進步所引發高爾夫球飛行距離過遠的問題，既規定發球杆桿面的反彈係數不得超過 0.83，桿頭容積率不得超過 460C.C.之後，開始限定高爾夫球的飛行距離，在高爾夫協會的測試標準下，不得超過 295 碼。NIKE 公司面對此一新的規定而召集研發人員討論，如果產品飛行距離經美國高爾夫球協會測試超過 295 碼，將會被宣布禁止使用，而造成龐大的損失。但是如果產品飛行距離少於 295 碼，則消費者的購買意願將不高。因此，公司領導階層要求研發部門開發出飛行平均距離 295 碼的產品。

研發部門在調整材質和球渦數目及分佈狀態之後，生產的高爾夫球中隨機抽

樣 36 顆送到美國高爾夫球協會進行測試。對此，公司領導高層採懷疑態度，認為該產品的飛行可能超過 295 碼或不足 295 碼，而要求研發部門先行測試。公司領導高層要求 95%的信心水準（α 為 0.05）。測試結果如下：36 顆樣本球的平均飛行距離為 297.6 碼，<u>已知母體的標準差</u>為 12 碼。請問該產品是否真的符合公司領導階層的要求。

Ha：$\mu \neq 295$（$\mu > 295$ 或 $\mu < 295$）

Ho：$\mu = 295$

1.297.6 - 295= 2.6

2.12 / $\sqrt{36}$ = 12 / 6= 2

3.Z 值＝2.6 / 2 = 1.3

4. 95%的信心水準下，虛無假設拒斥區右端的臨界 Z 值為 1.96；虛無假設拒斥區左端的臨界 Z 值為 -1.96。因而，凡樣本平均飛行距離的 Z 值≧1.96 或 z 值≦ -1.96，即落入虛無假設的拒斥區

5.樣本平均飛行距離的 z 值為 1.3，是介於-1.96 至 1.96 的 z 值之間，落入需無假設的接受區，沒有拒絕虛無假設。

<u>**結論：該產品符合公司領導階層的要求**</u>

■小樣本的 t 值雙尾檢定

例子、中華牌肉鬆曾被消基會控告標示重量不足，而嚴重影響到銷售量。公司領導高層要求工程部門改善裝填的技術過程，在 95%信心水準下，重量不得低於 16 兩，以避免上次事件的再發生；同時要求重量不得超過 16 兩，以避免增加成本。如果填充誤差呈常態分布，公司領導高層在工程部門改善填充過程之後，隨機抽取 9 罐肉鬆作為樣本，樣本平均重量為 16.07 兩，樣本標準差為 0.177 兩。請問工程部門有無達成高層的要求。

Ha：$\mu \neq 16$

Ho：$\mu = 16$

1.16.07 - 16 = 0.07

2. 0.177 / $\sqrt{9}$ = 0.059

3.T = 0.07 / 0.059 = 1.186

4.<u>**95%的信心水準下，α=0.05，而雙尾檢定為 α/2=0.025，在自由度 7（n-1=7）虛無假設右端拒斥區的臨界 T 值為 2.365；虛無假設左端拒斥區的臨界 T 值端**</u>

為 -2.365。

5.樣本平均容量的 T 值 = 1.186 （-2.365＜1.186＜2.365），落入虛無假設的接受區

6. Ho： μ=16 被接受；Ha： $\mu\neq$16 沒有成立

結論：工程部有達成高層的要求

■母體比例值的假設檢定

例子：揚昇高爾夫球場統計 2006 年來客的性別比例，發現女性來客僅佔整體來客數的 20%。球場行銷經理認為現代職場中女性主管以及女性白領專業人數均有增加，女性球友是一個值得開發的市場，而推出一系列的優惠專案，例如高爾夫仕女日，女性球友四人成行一人免費等。在專案推出一個月後，董事長許典雅想瞭解專案是否有效果，總經理採取系統抽樣方式，抽出 400 個樣本，經統計男性為 300 人，女性為 100 人，女性佔來客的 25%。如果你是總經理，你要如何向許董事長報告？

Ha：p＞0.2

Ho：p≦0.2

※當 np 且 n（1-p）≧5，樣本比例值的抽樣分佈將成常態機率分佈

400*0.2＝80

400*0.8＝320

※平均比例值的標準差（標準誤）＝√p(1-p)/√n

$$Z=(\bar{p}-p)/(\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n})$$

＝（0.25-0.2）/（0.4/20）

=0.05/0.02

=2.5

95%的信心水準下，虛無假設拒斥區的臨界 Z 值為 1.65。因而，凡樣本 Z 值＞1.65，即落入虛無假設的拒斥區，2.5＞1.65，拒絕虛無假設，研究假設成立。

結論：揚昇球場的專案有提高女性來客的效果。

■顯著值（P value）

統計軟體中有關假設檢定時會出現 P Value，在 95%信心水準下，若 P≦0.05 就表示拒絕虛無假設，若 P＞0.05 則接受虛無假設。

單尾檢定的 P Value＝0.5 -（樣本檢定值與 μ 所夾面積）

雙尾檢定的 P Value＝2*【0.5 -（樣本檢定值與 μ 所夾面積）】

玖、兩母體平均數與比例值的推論統計

一、兩獨立樣本之母體平均數差的區間估計

■　大樣本的區間估計

$\overline{x}1-\overline{x}2$ 的抽樣分配

當兩個獨立樣本的樣本數都大於或等於 30 時（n1≧30 且 n2≧30），則兩個樣本平均數的差將呈常態分佈。

兩樣本平均數的差的期望值＝ E（$\overline{X}1-\overline{X}2$）＝$\mu 1-\mu 2$

兩個樣本平均數差的標準差＝

$$\sigma_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$\sigma 1$＝母體 1 的標準差
$\sigma 2$＝母體 2 的標準差
n1＝母體 1 的抽樣樣本數
n2＝母體 2 的抽樣樣本數

母體	樣本數	樣本的平均年齡	樣本年齡的標準差
母體 1＝市區店	n1=36	X1＝40	s1=9
母體 2＝郊區店	n2=49	X2＝35	s2=10

$\sigma_{\overline{X1}-\overline{X2}}=\sqrt{}\,(\sigma_1^2/n1+\sigma_2^2/n2)$

$=\sqrt{}\,(9^2/36+10^2/49)$

$=\sqrt{2.25+2.04}$

$=\sqrt{4.29}$

$=2.07$

兩店顧客平均年齡差距的區間估計（$\alpha=0.05$）

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$$

＝（40-35）±1.96*2.07

＝5±1.96*2.07

=5±4.06

■　小樣本的區間估計

$\bar{x}1$-$\bar{x}2$ 的抽樣分配

當兩個獨立樣本的樣本數有任何一個或都小於 30 時（n1＜30 或 n2＜30），這時若要進行區間估計或假設檢定，母體必須常態分佈且母體的變異數相等（$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$）。如果母體的標準差已知，則可以適用 Z 分佈；如果母體的標準差未知，則需適用 T 分佈。在通常情況下，母體的標準差未知，而以樣本標準差估計之，因而小樣本的區間估計主要適用 T 分佈。

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2}\,s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$$

T 分布兩個樣本平均數差的標準差＝

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

σ^2的混合估計量=

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{s^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

n1＝母體 1 的抽樣樣本數
n2＝母體 2 的抽樣樣本數
s1＝母體 1 的樣本標準差
s2＝母體 2 的樣本標準差

自由度＝

df=（n1-1）＋（n2-1）=n1＋n2－2

母體	樣本數	樣本的平均餘額	樣本的標準差
母體 1＝信義分行	n1=12	X1＝1000	s1=150
母體 2＝萬華分行	n2=10	X2＝920	s2=120

s^2＝（n_1－1）s_1^2＋（n_2－1）s_2^2 / n_1+n_2-2

＝（12－1）150^2＋（10－1）120^2 / 12＋10－2

＝（247500＋129600）/ 20

＝18855

$\sigma_{\overline{X1}-\overline{X2}}$ ＝√ σ^2（1/n1＋1/n2）

＝√ s^2（1/12＋1/10）

＝√ 18855（1/12＋1/10）

＝√ 3456.75

＝58.79

富邦銀行兩家分行帳戶平均存款餘額差的 90%信賴區間估計

Df=12-1+10-1=20

α＝0.1　α/2=0.05

df=20，σ/2=0.05，T 值＝1.725

平均數差距的 90%信賴區間估計＝（1000-920）±1.725（58.79）

＝80±101.41

二、兩獨立母體平均數之差的假設檢定

■兩獨立母體平均數之差的假設檢定（大樣本＝n1≧30 且 n2≧30）

台北市國民小學家長協會想要瞭解，兩家記憶訓練機構的記憶訓練效果是否有顯著的差異？因而使用同一的記憶測試內容和方式，測試在這兩家記憶訓練機構隨機抽樣樣本，並以測試成績作為評估這兩家機構成效的標準。調查結果如下表：

母體	樣本數	樣本的平均成績	樣本的標準差
母體 1＝A 機構	n1=30	X1＝82.5	s1=8
母體 2＝B 機構	n2=40	X2＝78.0	s2=10

假設檢定的思考過程：

第一步驟：

μ1＝A 機構所有成員的平均測試成績（母體 1 的平均數）

μ2＝B 機構所有成員的平均測試成績（母體 2 的平均數）

第二步驟：

Ha：$\mu 1-\mu 2\neq 0$

Ho：$\mu 1-\mu 2=0$

第三步驟：

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$$

第四步驟：

分子式＝（82.5-78.0）－（$\mu 1-\mu 2=0$）＝4.5

分母式＝$\sqrt{}$（$8^2/30+10^2/40$）＝2.152

Z＝4.5/2.152＝2.09

第五步驟：

查表，$\alpha=0.05$，雙尾檢定，Z 檢定的檢定臨界值為±1.96

2.09 ＞1.96，虛無假設檢定值落入右端的拒斥區，拒絕虛無假設，研究假設成立。

第六步驟：

結論：A 機構的記憶訓練成效明顯較 B 機構好。

■ 兩獨立母體平均數之差的假設檢定（小樣本＝n1＜30 或 n2＜30）

某軟體設計公司開發出一套新的設計輔助軟體，宣稱可以有效縮短新資訊系統完成的時程。為證明其所言不虛，乃隨機抽樣 24 名系統分析師，分成實驗組與對照組兩組，每位系統分析師都必須完成指定的資訊系統。其間實驗組使用新的輔助軟體，而對照組則使用既有的設計軟體。調查結果如下表：

母體	樣本數	樣本的平均時間	樣本的標準差
母體 1＝對照組	n1=12	X1＝325	s1=40
母體 2＝實驗組	n2=12	X2＝288	s2=44

第一步驟：

$\mu 1$＝使用現有軟體的系統分析師完成設計所需的平均時間（母體 1 的平均數）

$\mu 2$＝使用新輔助軟體的系統分析師完成設計所需的平均時間（母體 2 的平均數）

第二步驟：

Ha：$\mu 1-\mu 2>0$

Ho：$\mu 1-\mu 2\leqq 0$

第三步驟：

$$t=\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s^2(1/n_1+1/n_2)}}$$

兩母體變異數的混合估計量：

$s^2=(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2\ /\ n_1+n_2-2$

$s^2=(12-1)40^2+(12-1)44^2\ /\ 12+12-2=1768$

第四步驟：

分子式＝（325-288）－（$\mu 1-\mu 2=0$）＝37
分母式＝$\sqrt{1768(1/12+1/12)}=17.166$

T 值＝37/17.166＝2.155

第五步驟：

DF=12+12-2=22

查表，$\alpha=0.05$，單尾檢定（拒斥區在右端），df=22，T 檢定的檢定臨界值為 1.717。2.155＞1.717，虛無假設檢定值落入右端的拒斥區，拒絕虛無假設，研究假設（Ha：$\mu 1-\mu 2>0$）成立。

第六步驟：

結論：該輔助軟體確實能有效縮短工作時間。

三、兩母體比例值之差的區間估計與假設檢定

■n_1P_1、$n_1(1-P_1)\geqq 5$ 且 n_2P_2、$n_2(1-P_2)\geqq 5$，P1-P2 的值將成常態分布

兩母體比例值之差的標準差

$$\sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}=\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

兩母體比例值之差的標準差之估計值

$$s_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

兩母體比例值之差的區間估計

$$\bar{p}_1-\bar{p}_2\pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$$

兩母體比例值之差的假設檢定（**Z** 檢定）

$$z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}}$$

母體比例值（**P**）的混合估計量（加權後的母體比例值估計量）

$$\bar{p}=\frac{n_1\bar{p}_1+n_2\bar{p}_2}{n_1+n_2}$$

當 **P1=P2**，$\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$（樣本比例值差的標準差）的點估計值

$$s_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(1/n_1+1/n_2\right)}$$

例子：教育部國教司委託學者進行城鄉差距的調查研究，其中想了解的小六生參加補習的情況是否有所差異。學者乃對台北市及雲林縣的小六生進行隨機抽樣和調查訪問，調查結果如下表：

母體	樣本數	有參加補習人數	參加補習比例

母體 1＝台北市	n1=400	F1＝320	320/400=0.8
母體 2＝雲林縣	n2=256	F2＝128	128/256=0.5

請問：

1.在 95%信心水準下，台北市、雲林縣兩縣市小六生參加補習比例值之差的區間估計為何？

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$$

$$s_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

（0.8-0.5）±1.96（√0.8*0.2/400+0.5*0.5/256）

=0.3±0.0371

2.請寫出該假設檢定的研究假設及虛無假設？

Ha：P1-P2≠0

Ho：P1-P2＝0

3.台北市、雲林縣兩縣市小六生參加補習比例值之差的檢定值為何？

因為虛無假設 Ho：P1-P2＝0，P1=P2，因而必須進行母體比例值的混合估計量的計算：

$$\bar{p} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2}$$

＝（400*0.8+256*0.5）/（400+256）

＝0.683

當 P1=P2 時，兩母體比例值差之標準差（SE）的計算公式如下：

$$s_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(1/n_1 + 1/n_2)}$$

＝$\sqrt{0.683*0.317（1/400+1/256）}$

＝0.0372

Z 值的計算：

$$z=\frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}}$$

=（0.8-0.5）－（P1-P2＝0）/0.0372

＝0.3/0.0372

＝8.06

4.在 95%信心水準下，研究結論為何？

5.在 99%信心水準下，研究結論為何？

四、配對樣本平均數之差的區間估計與檢定

配對樣本是指針對同一母體之固定樣本進行不同變項的測量調查，通常運用在生產方法或教學方法效果的比較上。以下是台塑公司為縮短 ABS 的製程，以配對樣本分別使用 A 及 B 製程完成生產所需的時間：

	A 製程	B 製程	完成時間差距(di）
樣本 1	6.0	5.4	0.6
樣本 2	5.0	5.2	-0.2
樣本 3	7.0	6.5	0.5
樣本 4	6.2	5.9	0.3
樣本 5	6.0	6.0	0.0
樣本 6	6.4	5.8	0.6

請問：

1. 寫出研究假設及虛無假設？
   Ha：$\mu 1-\mu 2=\mu d\neq 0$
   Ho：$\mu 1-\mu 2=\mu d=0$

2. 虛無假設的檢定值為何？

完成時間差的平均數＝$\Sigma di/n$＝1.8/6=0.3

完成時間差的標準差＝$\sqrt{\Sigma(X_i-\mu)^2/n-1}$＝$\sqrt{\Sigma(d_i-0.3)^2/6-1}$＝0.335

T=（0.3-μd）÷（0.335/$\sqrt{6}$）

=2.20

3. 假定α值為 0.05，研究結論為何？

Df=5，α值為 0.05 的雙尾檢定之臨界值為±2.571，虛無假設落入拒斥區。A 製程與 B 製程並沒有顯著的差異。

4. 在 95%信心水準下，兩製程平均數之差的區間估計為何？

0.3±2.571（0.335/$\sqrt{6}$）

＝0.3±0.35

拾、變異數與卡方檢定

一、單一母體變異數的區間估計和檢定

樣本變異數的計算公式（離均差平方和 ÷（樣本數-1））

$$s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

χ^2（卡方）的抽樣分布：從一個常態分布的母體中，隨機抽出樣本數為 n 的樣本，則（n-1）s^2/ σ^2的抽樣分布，乃呈（n -1）自由度的卡方分布。

$$\chi^2=（n-1）s^2/\sigma^2$$

$$\sigma^2=（n-1）s^2/\chi^2$$

※自由度不同，則卡方值的抽樣分佈型態也就不一，虛無假設拒斥區的臨界值也就不同。如同在 T 檢定時一般，在相同的α值下，不同的自由度會有不同的臨界值。所以卡方臨界值的查表過程中，必須先確定自由度。

■單一母體變異數的區間估計

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$$

1.自由度：n-1

2. α 值：落入臨界值右端的機率，也就是臨界值右端的面積大小

3. χ^2_{α}：在 n-1 自由度及特定 α 值下，所對應的卡方值，α 值越小則卡方值就越大

例如：從一常態分佈的母體中隨機抽出 20 個樣本，經統計其樣本變異數為 0.0025（s^2=0.0025），在 95%的信心水準下，請估計母體變異數之信賴區間。

$$\frac{(20-1)s^2}{\chi^2_{0.05/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(20-1)s^2}{\chi^2_{(1-0.05/2)}}$$

$$\frac{(20-1)\,0.0025}{\chi^2_{0.025}} \le \sigma^2 \le \frac{(20-1)\,0.0025}{\chi^2_{0.975}}$$

分子式：（20-1）0.0025＝19×0.0025＝0.0475

$\chi^2_{0.025}$＝32.8523（查表）＝＞0.0475/32.8523＝0.001446

$\chi^2_{0.975}$＝8.90655（查表）＝＞0.0475/8.90655＝0.005333

95%信心水準的變異數區間估計值：

$$0.0015 \leqq \sigma^2 \leqq 0.0053$$

■單一母體變異數的假設檢定

台灣鐵路公司不僅弊案頻傳，火車誤點更是家常便飯。交通部長郭瑤祺決定統下針砭，下令給鐵路局局長必須在三個月內，將每班火車誤點時間的變異數降到 4 分鐘以下，否則局長下台。時間過得很快，轉眼間三個月期限已到，已知火車到站時間呈常態分佈，隨機抽樣 10 個火車班次，結果如下表：

樣本	誤點時間
1	8
2	2
3	1
4	6
5	3
6	5
7	7
8	4
9	2
10	6

請問：

1.請建立研究假設與虛無假設

$$\mathrm{Ha}：\sigma^2 > 4$$

$$\mathrm{Ho}：\sigma^2 \leqq 4$$

2.樣本卡方值為何？

$$\chi^2 = (n-1)\,s^2 / \sigma^2$$

$$s^2 = 5.6$$

$$n=10$$

$$\sigma^2 = 4$$

$$\chi^2 = (10-1)\,5.6/4$$

$$= 9*5.6/4$$

$$=12.6$$

3. 若 α 為 0.05，虛無假設拒斥區的臨界值為何？

$$\alpha = 0.05，df=9，\chi^2 = 16.919$$

4. 若 α 為 0.1，虛無假設拒斥區的臨界值為何？

$\alpha = 0.01$，df=9，$\chi^2 = 21.666$

5.鐵路局局長是否要下台？

不需要下台

二、兩母體變異數的假設檢定

■F 值的抽樣分佈

從兩個常態分佈且變異數相等的獨立母體，分別隨機抽出 n1 及 n2 的樣本，n1 樣本的變異數 S_1^2，n2 樣本變異數 S_2^2，則 S_1^2/S_2^2 的抽樣分佈，成為分子自由度為（n1-1），分母自由度為（n2-1）的 F 分佈。

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

■兩母體變異數的假設檢定

台北縣立鶯歌高職公告每年一度的校車運輸服務合約招標，辦法規定以服務品質作為第一優先議價廠商，服務品質是以校車到達學校時間的變異數為指標，變異數越低表示服務品質越穩定。有兩家客運公司競標，在試用期三月內，已知兩公司校車到達時間分別成常態分佈且母體變異數相等。校方隨機抽取兩家公司班次進行調查，結果如下表：

公司名稱	樣本數	樣本變異數
A 公司（母體 1）	n1=25	$S_1^2=48$
B 公司（母體 2）	n2=16	$S_2^2=20$

請問：

1.請建立研究假設與虛無假設

$$Ha：\sigma 1^2 \neq \sigma 2^2$$

$$Ho：\sigma 1^2 = \sigma 2^2$$

2.樣本 F 值為何？

$$F = S_1^2 / S_2^2$$

$$= 48/20$$

$$= 2.4$$

3. 若α為 0.1，虛無假設拒斥區的臨界值為何？

$\alpha/2$＝0.05，分子的自由度 df=25-1＝24，分母的自由度 df=16-1＝15

查表（A-8）右端的臨界值為 $F_{0.05}=2.29$，左端的臨界值為 $F_{0.95}=0.47$

$$F_{(1-\alpha)、df_1、df_2}=1 / F_{(\alpha)、df_2、df_1}$$

$$=1/2.11$$

$$=0.4739$$

4.鶯歌高職應該優先與哪家公司議約？

應與 B 公司議約

拾壹、適合度與獨立性的卡方檢定

卡方檢定是適用在類別變項又稱名義變項（nominal variable）假設檢定的統計方法，它是社會科學研究過程中使用最普遍的統計方法，因為社會科學研究的變項通常為類別變項。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

K：指該類別變項具有 K 個類別（例如性別可分為男、女兩類別，這時 K=2；彩虹的顏色有紅橙黃綠藍靛紫七色，這時 K=7）

f_i：指變項第 i 類的觀察次數

e_i：指變項第 i 類的期望次數

※概似比卡方值＝2 Σ觀察值 × Log(觀察值/期望值)

一、單一類別變項的適合度卡方檢定

卡方適合度檢定是用在檢視某特定類別變項的觀察次數分布，是否符合某種特定的分布型態（研究者假設的分布型態，以及理論上的分布型態）。

例如某幼兒教育學者想探討，學齡前的幼兒對顏色有無不同的偏好，乃隨機抽樣 140 位學齡前幼兒，以彩虹七顏色詢問這 140 名兒童，最喜歡哪一種顏色？調查結果如下表：

顏色	紅	橙	黃	綠	藍	靛	紫	合計
觀察次數	20	10	15	30	50	5	10	140
期望次數	20	20	20	20	20	20	20	140

1.請寫出研究假設和虛無假設

研究假設：學齡前兒童對不同的顏色有不同的偏好

虛無假設：學齡前兒童對不同的顏色沒有不同的偏好

2.請計算出卡方值

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

χ^2＝（20-20）^{2}/20＋（10-20）^{2}/20＋（15-20）^{2}/20＋（30-20）^{2}/20＋（50-20）^{2}/20＋（5-20）^{2}/20＋（10-20）^{2}/20

=0/20＋100/20＋25/20＋100/20＋900/20＋225/20＋100/20

=0＋5＋1.25＋5＋45＋11.25＋5

＝72.5

3.若 α 值為 0.05，請寫出虛無假設拒斥區的臨界值

α ＝0.05，df＝K-1＝7-1＝6

查表 χ^2 的臨界值為 12.5916（在自由度等於 6 的卡方分布中，一個隨機抽樣獲得的 χ^2 值，其值大於 12.5916 的機率只有 0.05）

4.請寫出研究結論

樣本卡方值為 72.5，大於臨界值的 12.5916，落入虛無假設的拒斥區，研究假設成立，學齡前兒童對顏色有不同的偏好。

這位學者想進一步探討文化背景因素是否會影響學齡前兒童對顏色的偏好？他找到美國的相關研究文獻，美國學齡前兒童對紅橙黃綠藍靛紫七顏色的偏好分布

比例為 2：1：1：2：4：1：1。

顏色	紅	橙	黃	綠	藍	靛	紫	合計
觀察次數	20	10	15	30	50	5	10	140
期望次數	23.3	11.7	11.7	23.3	46.7	11.7	11.7	140

紅的期望次數＝2/12*140＝23.3

橙的期望次數＝1/12*140＝11.7

黃的期望次數＝1/12*140＝11.7

綠的期望次數＝2/12*140＝23.3

藍的期望次數＝4/12*140＝46.7

靛的期望次數＝1/12*140＝11.7

紫的期望次數＝1/12*140＝11.7

請問：

1.請寫出研究假設和虛無假設

研究假設：文化背景因素會影響學齡前兒童的顏色偏好分布比例

虛無假設：文化背景因素不會影響學齡前兒童的顏色偏好分布比例

2.卡方值為何？

顏色	紅	橙	黃	綠	藍	靛	紫	合計
觀察次數（fi）	20	10	15	30	50	5	10	14
期望次數（ei）	23.3	11.7	11.7	23.3	46.7	11.7	11.7	14
（fi-ei）	-3.3	-1.7	3.3	6.7	3.3	-6.7	-1.7	
$（fi\text{-}ei）^2$	10.89	2.89	10.89	44.89	10.89	44.89	2.89	
$（fi\text{-}ei）^2/ei$	0.467382	0.247009	0.930769	1.926609	0.233191	3.836752	0.247009	7.8887

χ^2＝7.89

3.若 α 值為 0.05，請寫出虛無假設拒斥區的臨界值

查表 χ^2 的臨界值為 12.5916（在自由度等於 6 的卡方分布中，一個隨機抽樣獲得的 χ^2 值，其值大於 12.5916 的機率只有 0.05）

4.研究結論為何？

樣本卡方值為 7.89，小於臨界值的 12.5916，落入虛無假設的接受區，研究假設沒有成立，不同文化背景的學齡前兒童沒有不同的顏色偏好，文化背景因素不會影響學齡前兒童的顏色偏好分布比例。

二、兩變項的獨立性卡方檢定

卡方檢定除可應用在單類別變項次數分布的適合度檢定之外，應用最廣的兩類別變項的獨立性（即相關性）檢定上。例如廠商想了解不同的性別在不同種類啤酒的偏好分布型態是否不同，亦即性別變項是否會影響消費者對啤酒種類不同的偏好。

台灣啤酒公司想解不同性別的消費者對該公司啤酒產品是否有不同偏好，乃委託中華大學民調中心進行抽樣調查，調查結果如下表：

	生啤	一般	黑啤	合計
男	20（1.1）	40（1.2）	20（1.3）	80（1.j）
女	30（2.1）	30（2.2）	10（2.3）	70（2.j）
合計	50（i.1）	70（i.2）	30（i.3）	150（i.j）

請問：

1.寫出研究假設和虛無假設

研究假設：性別與啤酒的偏好有相關性存在

虛無假設：性別與啤酒偏好沒有相關性存在（獨立關係）

2.計算出每細格的期望次數

	生啤	一般	黑啤	合計
男	26.67	37.33	16.00	80
女	23.33	0.22	14.00	70
合計	50	70	30	150

3.卡方值為何？

性別	啤酒	觀察次數	期望次數	（fi-ei）	$（fi-ei）^2$	$（fi-ei）^2/ei$
男	生啤	20	26.67	-6.67	44.4889	1.668125
男	一般	40	37.33	2.67	7.1289	0.19097
男	黑啤	20	16	4	16	1
女	生啤	30	23.33	6.67	44.4889	1.90694
女	一般	30	32.67	-2.67	7.1289	0.218209
女	黑啤	10	14	-4	16	1.142857
合計		150	150			$\chi^2=6.127101$

4.若α值為 0.05，虛無假設拒斥區的卡方臨界值為何？

df＝（r-1）（c-1）＝（2-1）（3-1）＝1×2＝2

df=2，α=0.05，查表χ^2＝5.99147

5.研究結論為何？

樣本的卡方檢定值為 6.127101，大於臨界值的 5.99147，落入虛無假設的拒斥區，研究假設成立，對啤酒的偏好確實男女有別。

三、細格次數顯著程度的估計

我們不僅要看變項與變項之間的卡方值大小，藉以了解變項與變項之間的關係，同時我們還要看每個細格影響力的大小。這時就必須看調整後剩餘殘值的大小，調整後剩餘殘差值的分布成常態分布，因而，在 95%的信心水準下，當 Adj≧1.96 或 Adj≦-1.96，就表示該細格的分布次數顯著偏高或顯著偏低。

$$\text{調整後剩餘殘差值} = \frac{fo-fe}{\sqrt{fe\left(1-\frac{Fi}{N}\right)\left(1-\frac{Fj}{N}\right)}}$$

	生啤	一般	黑啤	合計
男	20（-2.31）	40（0.67）	20（1.64）	80
女	30（2.31）	30（-0.67）	10（-1.64）	70
合計	50	70	30	150

細格（1.1）的調整後剩餘殘差值

=20-26.67/√26.67（1-80/150）（1-50/150）

=-6.67/√26.67（70/150）（100/150）

=-6.67/√8.30

=-6.67/2.88

=-2.31

細格（2.1）的調整後剩餘殘差值

=30-23.33/√23.33（1-70/150）（1-50/150）

=6.67/√23.33（80/150）（100/150）

$=6.67/\sqrt{8.30}$

$=6.67/2.88$

$=2.31$

細格（2.3）的調整後剩餘殘差值

$=10-14/\sqrt{14（1-70/150）（1-30/150）}$

$=-4/\sqrt{14（80/150）（120/150）}$

$=-4/\sqrt{5.97}$

$=-4/2.44$

$=-1.64$

調查研究與推論統計的基本概念

六、變項間的統計關係是相關關係，不是因果關係，統計分析中的因果關係是受理論的支配。

七、變項與測量尺度

1.何謂變項：由不同文字類別或數值屬性所組成的概念。例如性別變項包含男、女兩個不同類別；年齡變項包含不同年齡數組成；省籍變項包含本省閩南籍、本省客家籍、外省籍、原住民等。

2.變項的類別：根據研究者所提出的研究假設和模型，變項可分為自變項（independent variable）、依變項（dependent variable），以及控制變項（control variable）。自變項又稱為解釋變項，依變項又稱為被解釋變項，自變項的變動將導致依變項的變動；控制變項指在模型中保持恆常的變項。

3.變項的測量尺度：

名義變項：性別、血型、省籍、政黨認同、職業、宗教信仰等。變項值屬於文字定義，無法進行加減乘除運算。

順序變項：學歷、社會地位、評等、名次。變項值之間的間距並不相等，只能做大小、高低的比較，無法做加減運算。

等距變項：溫度，變項值之間的間距相等而可以做加減運算，但無絕對零點的存在，無法做乘除運算。因此，可以說攝氏 30 度比 15 度高出 15 度，但無法說 30 度的溫度是 15 度的兩倍。

比率變項：身高、體重。因為有絕對零點，因此變項值之間可以做四則運算。

1. 高階的變項測量尺度可以適用低階變項測量只度的統計方法，但低階變項測量尺度不能是用高階變項測量尺度的統計方法。

變項量尺	比較異同	比較大小	加減	乘除	實例
名義量尺	○				性別、省籍
順序量尺	○	○			學歷
等距量尺	○	○	○		溫度
等比量尺	○	○	○	○	身高、速度

八、問卷設計

1. 操作化定義：賦予變項概念可以進實際測量的內容

2. 信度與效度：信度是指測量工具測量所得結果的穩定度與一致性，在不同時空環境下針對特定受測者的測量所得的結果都一樣。檢視信度的方法有再測信度、平行測驗、折半相關信度等方式。效度是指測量工具能正確測量到所欲測量概念的程度，不能使用體重計去量血壓或身高。檢視效度的方式有表面效度、內容效度、效標效度、建構效度等。好的測量是同時兼顧信度與效度，如同一把好的彈著點集中且靠近靶心。

3. 測量誤差：觀察分數＝實際分數＋誤差

※隨機性的測量誤差在正負相抵之後，對整體推估的影響較小；相對地，系統性的測量誤差，會導致測量分數一致偏高或偏低，對整體推估產生系統性的偏誤。

4.測量誤差的可能來源：

測量工具本身的問題：測量工具沒有效度；受訪者對題意的誤解，例如用字深奧、語意不清、一個題目問兩件事；所問問題敏感，例如收入多少；所問問題涉及社會道德規範，例如是否接受賄選、是否有去投票；引導式問卷，受訪者對前面問題的回答，嚴重影響到他對後面問題的回答傾向。

受訪者本身的問題，例如訪問當時身體不舒服、心情特別好或特別壞、訪問環境的干擾。

訪員本身的問題，語言表達能力不足、沒有誠實紀錄、登載錯誤等

5.問卷設計的步驟

（1）確定研究主題、研究目的與研究對象：決定資料的收集範圍

（2）決定分析架構：進行問卷設計，將研究假設所涉及的研究變項進行操作化定義成為問卷的題目。

（3）構思問卷題目的內容：參考其他人所作過的題目、避免測量工具本身所帶來的測量誤差。

（4）決定題目順序：由淺而深、由易而難、區塊設計

（5）邀請專家學者檢視並修訂問卷

（6）前測

（7）定稿

6.問卷設計應遵循的原則

（1）題意清楚：一題只問一件事

（2）客觀及公正原則：避免引導式的語句、避免引導性的結構設計、避免有特定傾向的語句

錯誤示範：請問您同不同意「軍購是防衛台灣的必要手段，而國親兩黨反軍購是不愛台灣的表現」

（3）選項窮盡且不相容原則

（4）敏感性問題處理原則：責任分攤語句，例如：「根據我們的了解，過去的選舉大約有三成選民因種種原因而沒有去投票，請問您這次立委選舉您有沒有去投票?」

（5）中立、不知道、沒意見的處理原則

（6）正反面提問原則

7.信度檢定方法：（檢測測量工具【問卷】的穩定性）

（1）再測信度法（retest）：指對同一受測對象使用同一測量工具施測兩次，信度高的測量工具前後兩次所測的結果應當一致（穩定性高）。據此，如果前後兩次測量所得測量結果的相關程度越高，則表示測量工具的信度也就越高，而具有相當的穩定性；相對地，如果前後兩次測量結果的相關程度低，則表示測量工具的信度低，不穩定。

（2）並行信度法（parallel-form test）：設計出兩套相似的測量題目對同一受測對象前後施測兩次，看看是否得到一致的結果。

（3）折半信度法（split-half test）：應用於測量量表信度的檢測，將測量同一概念的多道測量題目隨機對分，檢視兩部分測量所得分數的相關程度，如果相關程度高，則表示測量結果一致性高，測量工具信度高；反之，則測量工具信度低。

（4）內部一致信度法（internal consistency test）：同樣應用於測量量表的信度檢

測，將測量同一概念的多道題目，兩兩配對逐一作相關分析，其中若有些題目與其他題目相關程度低，則表示該測量題目可能是不適當的，而可以考慮去除（因素分析法）。

8.效度檢定方法：（檢測測量工具【問卷】的有效性）

（1）表面效度法（face validity）：指測量工具在表面上看起來，已經測量到所欲測量的概念。這是研究者的主觀判斷結果，有時候並不正確。

（2）內容效度法（content validity）：指測量工具包含了所要測量概念的全部面向，例如對社會連帶關係的測量，包括婚姻狀態、居住狀態、宗教信仰狀態、社團參與狀態。這是研究者主觀認為社會連帶關係應該包含這些面向，是研究者主觀判斷的結果，有時候並不正確。

（3）效標效度法（criterion validity）：指測量所得之結果與其所要測量概念之實際有效指標間的關聯性。例如詢問受訪者的年齡，這時受訪者身分證的出生年月日登記便是有效指標，例如詢問受訪者有無投票，這時選舉人名冊的登記便是一個有效指標。因此，某一測量工具越能測出受訪者在目前或未來的行為表現，則該組測量工具的效標效度高。例如大學聯考入學成績與大學成績之間具有高度的相關性，則表示大學聯考可以測量出學生的學習能力而具有效標效度。

（4）建構效度法（construct validity）：根據理論的假設及推演，告訴我們某一概念與另一概念之間有一定關係的存在，哪麼檢視代表這兩個概念的變項間的關係，是否如理論上所預期的相一致，如果一致性程度越高，則代表測量這兩個概念的測量工具效度越高。

（5）因素分析法（factor analysis）：假定一份測量某特定概念（例如威權人格）問卷具有效度，哪麼各題之間的相關程度應該非常高，經過因素分析的結果只會出現一個共同因素才對，如果出現兩個以上的共同因素，則表示該份測量問卷所測量的概念不只一個，則該問卷的效度便有問題。

九、資料檔的建立

1.SPSS 變項表的建立

2.SPSS 資料表的建立

十、資料的轉化及重組

1.加權（weight）：先對收集所得資料進行樣本代表性檢定，如果樣本結構與母體結構有統計上明顯的差異，則對樣本個案進行加權處理。

2.重組（recode）：基於理論或統計方法應用上的需要，須對原始的變項之變項值進行重新編碼，例如將年齡變項進行五分類的重組，將 20-29 歲歸為

一組、30-39 歲歸為一組、40-49 歲歸為一組、50-59 歲歸為一組、60 歲以上歸為一組。

3.轉化（computer）：將原始多個變項轉化成另依新的變項，例如將婚姻、居住年數、社團參與等變項，轉化成社會連帶變項。例如將最喜歡候選人變項和最討厭候選人變項，轉化成策略投票變項。

4.計次（count）：計算測量量表中某特定變項值出現的次數而形成新的一個變項，或者將離散變項作 0 與 1 的虛擬變項，給予離散變項某一特定變項值的出現計次為 1，其他變項值的出現計次為 0。

十一、常用的描述統計方法

1.平均數

2.中位數

3.眾數

4.變異數

5.標準差

6.次數分布

7.百分比

十二、常用的相關關係檢定統計方法

關聯測量法是以一個統計值（通常介於 0 與 1 之間，0 表示變項與變項之間是獨立關係，1 代表遍項與變項之間完全相關），來表示變項與變項之間的關聯程度，數值越大表示變項間關聯性越高。

在進行關聯統計分析時必須注意到三件事：一為變項的測量尺度；另一為有無對稱性；最後為有無消減誤差比例的意含。

※測量尺度：名義變項、順序變項、等距變項、等比變項

※對稱關係與不對稱關係：對稱關係（symmetrical relation），指 X→Y 且 X←Y（不區分自變項或依變項）；不對稱關係（asymmetrical relation），指 X 會影響 Y 但 Y 不會影響 X（區分自變項和依變項）。

※消減誤差比（proportionate reduction in error）PRE＝（E1－E2）/ E1，E1 代表沒用 X 變項來預測 Y 時所產生的誤差（類別資料是以眾數；連續資料是以平均數來做預測），E2 表示用 X 變項來預測 Y 時所產生的誤差，PRE 等於是用 X 變項來預測 Y 時所能減少的誤差比率，也就是 X 變項能夠解釋多少的總變異量。

對稱關係

	名義	順序	等距	等比
名義	Lambda λ			
順序		Gamma、		
等距			Pearson	
等比				

Lambda λ＝Σmx＋Σmy－（Mx＋My）/ 2N－（Mx＋My）

mx＝對應於 Y 變項之變項值下，X 變項的眾值。

my＝對應於 X 變項之變項值下，Y 變項的眾值

Mx＝X 變項的眾值

My＝Y 變項的眾值

N＝個案總數

年輕人交友價值觀與其知心朋友的交友價值觀分布表

		知心朋友（X）			
		友直	友諒	友多聞	合計
青年本身（Y）	友直	28	9	3	40
	友諒	2	41	7	50
	友多聞	2	4	4	10
	合計	32	54	14	100

Σmx＝對應於 Y 變項之變項值下，X 變項的眾值＝28+41+4＝73

Σmy＝對應於 X 變項之變項值下，Y 變項的眾值＝28+41+7＝76

Mx＝X 變項的眾值＝54

My＝Y 變項的眾值＝50

N＝個案總數＝100

Lambda λ＝Σmx＋Σmy－（Mx＋My）/ 2N－（Mx＋My）

=73（28+41+4）+76（28+41+7）-（54+50）/200-（54+50）

=45/96

=0.46875

λ=0.46875。這表示如果以兩變項變項值的眾數來相互預測，則比以兩變項的眾值來預測可減少 47%的誤差。

不對稱關係

	名義	順序	等距	等比
名義	λyx、Tau-y			
順序		Dyx		
等距				
等比				

λyx＝Σmy－My / N－My

my＝對應 X 變項之變項值下，Y 變項值的眾值

My＝Y 變項的眾值

N＝個案總數

性別對人生目標的影響分布表

		性別（X）		
		男	女	合計
目標（Y）	快樂家庭	10	30	40
	理想工作	40	10	50
	增廣見聞	10	0	10
	合計	60	40	100

Σmy＝對應 X 變項之變項值下，Y 變項值的眾值＝40+30＝70

My＝Y 變項的眾值＝50

N＝個案總數＝100

λyx＝Σmy－My / N－My

＝70-50/100-50

＝20/50

＝0.4

λyx＝0.4。這表示用性別（X）來預測人生目標（Y），可以減少 40%的誤差。

Tau-y＝E1－E2 / E1

E1＝總誤差＝在沒有 X 變項（性別）做參照的情下，對 Y 變項的各個變項值進行估計的犯錯機率總和＝Σ（N－Fj【Y 變項之邊際次數】）/N × Fj /N（邊際機率）。

E2＝有 X 變項（性別）做參照的情下，對對應 X 變項值之下的 Y 變項的各個變項值進行估計的犯錯機率總和＝ΣΣ（Fi【X 變項之邊際次數】－fji）/Fi × fji/ Fi（條件機率）。

十三、常用的假設檢定統計方法

1.卡方檢定

適用於類別變項（名義量尺）的統計檢定方法。簡單說卡方檢定是用來檢定樣本的次數分布，是否與理論或母體的次數分步有明顯的差異。理論或母體的分配狀況可以用期望值來表示，當觀察值與期望值的差異越大，卡方值也就越大，考驗的結果越容易達到顯著水準；相反，如果當觀察值與期望值的差異越小，卡方值也就越小，考驗的結果越不容易達到顯著水準。

卡方值＝Σ（觀察值－值望值）的平方　/ 期望值

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

細格期望值的計算公式：列邊際次數/總次數 × 欄邊際次數/總次數 × 總次數

例子：分析父母期待是否會影響子女上大學的自我期待（觀察次數分布）

		父母		
		是	否	合計
子女	是	873	145	1018
	否	134	239	373
	合計	1007	384	1391

分析父母期待是否會影響子女上大學的自我期待（機率分布）

		父母		
		是	否	合計
子女	是	0.6276	0.1042	0.7318
	否	0.0963	0.1718	0.2682

	合計	0.7239	0.2761	1.0000

分析父母期待是否會影響子女上大學的自我期待（期望次數分布）

		父母		
		是	否	合計
子女	是	737	281	1018
	否	270	103	373
	合計	1007	384	1391

$\chi^2 = (873-737)^2 / 737 + (134-270)^2 / 270 + (145-281)^2 / 281 + (239-103)^2 / 103$

=339.141876

我們不僅要看變項與變項之間的卡方值大小，藉以了解變項與變項之間的關係，同時我們還要看每個細格影響力的大小。這時就必須看調整後剩餘殘值的大小，調整後剩餘殘差值的分布成常態分布，因而，在 95%的信心水準下，當 Adj≧1.96 或 Adj≦-1.96，就表示該細格的分布次數顯著偏高或顯著偏低。

$$\text{調整後剩餘殘差值} = \frac{fo\text{-}fe}{\sqrt{fe\left(1-\frac{Fi}{N}\right)\left(1-\frac{Fj}{N}\right)}}$$

2.常態分布與樣本平均數的檢定

中央極限定理：在大數法則底下，反覆從平均數為μ，標準差為σ的母體中，抽取出樣本數超過 30 的樣本，並計算樣本平均數，樣本平均數的分佈將成常態分佈，且樣本平均數的平均數等於母體的平均數μ，樣本平均數的標準差（稱為標準誤 SE）等於『母體的標準差/樣本數開根號』（$\sigma/\sqrt{n}$）。樣本平均數±1.96 個標準差（$\sigma/\sqrt{n}$）的區間內，會有 95%的隨機抽樣的樣本平均數落在這個區間內；在樣本平均數±2.58 個標準差（$\sigma/\sqrt{n}$）的區間內，會有 99%的隨機抽樣的樣本平均數落在這個區間內。

常態分布的檢定：檢視分布曲線的偏態（Skewness）和峰度（Kurtosis）是否在 0±1.96SE 之間（見 P.57）。

Z 檢定的公式＝樣本平均數±1.96（1-α/2）個標準差（$\sigma/\sqrt{n}$），當 Z 值大於 1.96 或小於-1.96 時，虛無假設落入拒斥區，研究假設暫時被接受。

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

T 檢定的公式＝樣本平均數±1.96（1-α/2, n-1）個標準差（s /$\sqrt{n}$），T 值必須當確定自由度之後方能決定。但樣本數夠大時（n-1＞30），則 T 分配接近常態分配，T 值大於 1.96 或小於-1.96 時，則表示虛無假設落入拒斥區，研究假設暫時被接受。

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

因此，推論統計的平均數檢定，在無法確知母體的標準差的情況下，且樣本小的情況下，是以 T 檢定為準。T 檢定的基本假設條件：1）樣本成常態分布；2）樣本群之間的變異數相同。

樣本平均數檢定	樣本數多寡	母體的標準差是否已知
Z 檢定	多	不理會
T 檢定	少	否

T 值＝（樣本平均數－母體平均數）/ 樣本平均數標準差….中央極限定理

樣本平均數若落入母體平均數±1.96 個標準差之內，就表示在 95%的信心水準下，樣本平均數沒有顯著差異，無法拒絕虛無假設。

T 檢定的類型：單一樣本檢定、獨立樣本檢定、固定樣本檢定

單一樣本 T 檢定（One-sample T Test）：檢定單一樣本平均數與理論期望值是否有顯著差異。

獨立樣本 T 檢定（Independent-samples T Test）：檢定兩個獨立樣本群的樣本平均數是否有顯著差異。

配對樣本 T 檢定（Paired-samples T Test）：檢定同一樣本在前後施測或不同施測項目所得平均數是否有顯著差異。配對樣本 T 檢定的概念與單一樣本 T 檢定相類似，即計算同一樣本在兩個變項之間的差異，再對此差異進行單一樣本檢定。

獨立樣本 T 檢定：其功能在於比較不同樣本群之間的平均數是否有明顯的差異，因而必須符合中央極限定理的要求，樣本必須成常態分布；其次，若不同樣本的

變異數不同，顯示不同樣本除了有平均數的差異之外，尚有其他導致差異的來源，致使不同樣本群之間的變異數出現明顯的差異。所以必須先對不同樣本群之間的變異數同質與否進行檢視。換言之，在總變異量=組間差異＋間內差異的情況下，T 檢定是要確認樣本群組間差異的存在與否？在此情況下必須先假定組內差異不存在。

3.變異數分析（F 檢定）

T 檢定適用以檢定一個樣本平均數與母體平均數（理論期望值）之間是否有顯著差異，或是比較兩個獨立樣本平均數之間是否顯著差異，或是比較固定樣本在前後測量或不同兩個變項所得樣本平均數之間是否顯著差異。F 檢定則適用在兩個以上獨立樣本間的樣本平均數差異的檢定。

當我們想檢定一個自變項（類別變項）對一個依變項（連續變項）的影響時（單因子變異數分析），就可以根據自變項的類別進行分組，統計分析各組間依變項的樣本平均數是否顯著差異，若有顯著差異則表現自變項對依變項確實具有影響力。

變異數統計分析方法的基本假定前提：

a.樣本的獨立性：一樣本的出現並不影響另一樣本的出現機率。

b.樣本分布的常態性：樣本在依變項的變項值要成常態分布。

c.各組變異數的同質性：各組間的變異數要相同。

d.可累加性：總變異量＝組間變異量＋組內變異量。

變異數分析的基本概念：

變異來源	Df	MS	F 值
組間離均差平方和 ssb	組數-1（dfb）	ssb/ dfb=MSB	MSB/ MSW
組內離均差平方和 ssw	樣本數-組數（dfw）	ssw/ dfw=MSW	
總體離均差平方和 sst	樣本數-1（dft）		

組間離均差平方和 ssb＝Σ（分組的平均數－總體平均數）^{2}*分組人數

組內離均差平方和 ssw＝ΣΣ（分組觀察數值－分組平均數）^{2}

總體離均差平方和 sst＝組間離均差平方和 ssb＋組內離均差平方和 ssw